

Introduction à la Théorie des Groupes et aux Représentations Linéaires des Groupes Finis

Benjamin Canals
Institut Néel - CNRS - Grenoble

Idée

- les opérations de symétrie possèdent une structure intrinsèque.
→ il faut comprendre cette structure (G)
- ces opérations agissent sur la physique: opérateurs, états.
→ il faut comprendre le lien entre la structure et son action, c'est à dire formaliser l'action du groupe sur l'espace physique (action de G sur E).
- peut-on construire une théorie systématique du lien entre un groupe G et un espace E ?
Oui: représentations (linéaires).
Avantage: représentation géométrique immédiate.

Plan

★ Introduction à la théorie des groupes (I)

- ▶ structure grossière
- ▶ structure fine
- ▶ correspondances entre groupes
- ▶ opérations d'un groupe sur un espace

★ Introduction aux représentations linéaires des groupes finis (II)

- ▶ introduction (intuition et principes)
- ▶ représentations, symétries et quelques remarques physiques
- ▶ structure des représentations
- ▶ constructions ad-hoc et propriétés algébriques
- ▶ retour à la physique

Plan - I : introduction à la théorie des groupes

★ Structure de Groupe

- ▶ axiomes d'un groupe
- ▶ sous groupes
- ▶ générateurs et algèbre du groupe
- ▶ groupes finis : tables et diagrammes de Cayley
- ▶ homomorphismes de groupes

★ Actions de groupes

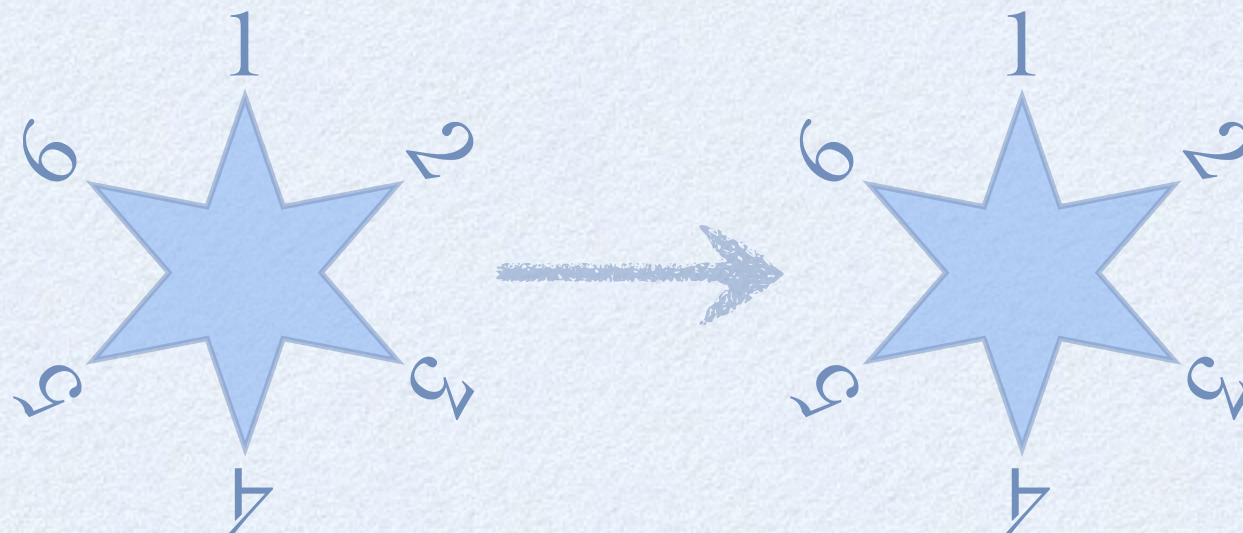
- ▶ partition d'un ensemble
- ▶ relation d'équivalence
- ▶ classe d'équivalence, ensemble quotient, partition induite par un sous groupe
- ▶ algèbre de classe, sous groupe distingué, groupe quotient
- ▶ Lagrange et réarrangement
- ▶ actions, conjugaison, orbites et stabilisateurs

Structure de Groupe

Pour introduire la structure de groupe, on ne va pas faire du Bourbaki, mais plutôt procéder de manière (pseudo) empirique.

Dans un groupe :

 il y a ce qui ne fait rien.



- Tout objet reste invariant par l'action de cette opération.
C'est l'identité ou élément neutre.

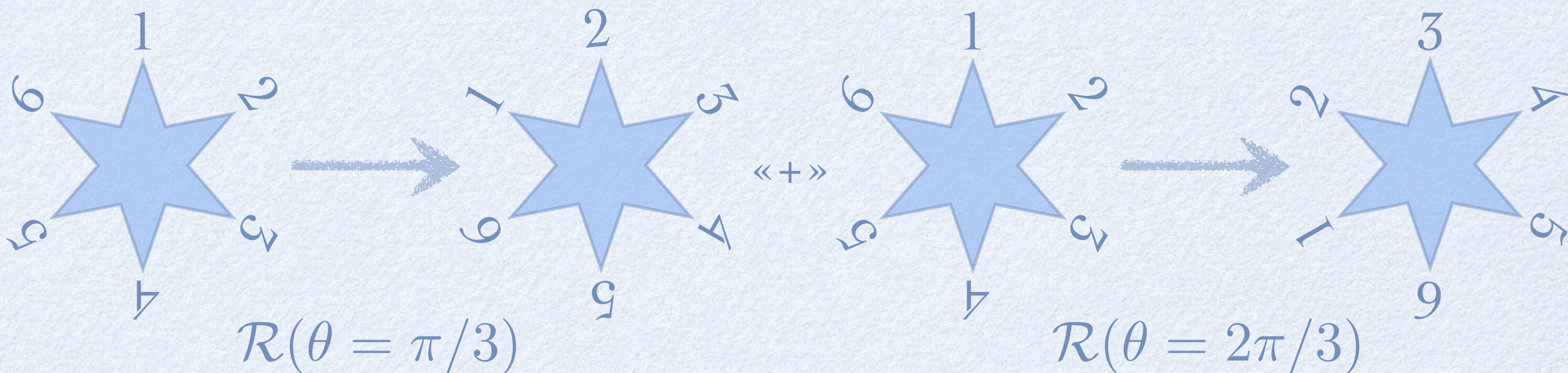
Structure de Groupe

Pour introduire la structure de groupe, on ne va pas faire du Bourbaki, mais plutôt procéder de manière pseudo empirique.

Dans un groupe:



on peut combiner des opérations de symétrie et obtenir de nouvelles opérations de symétrie.

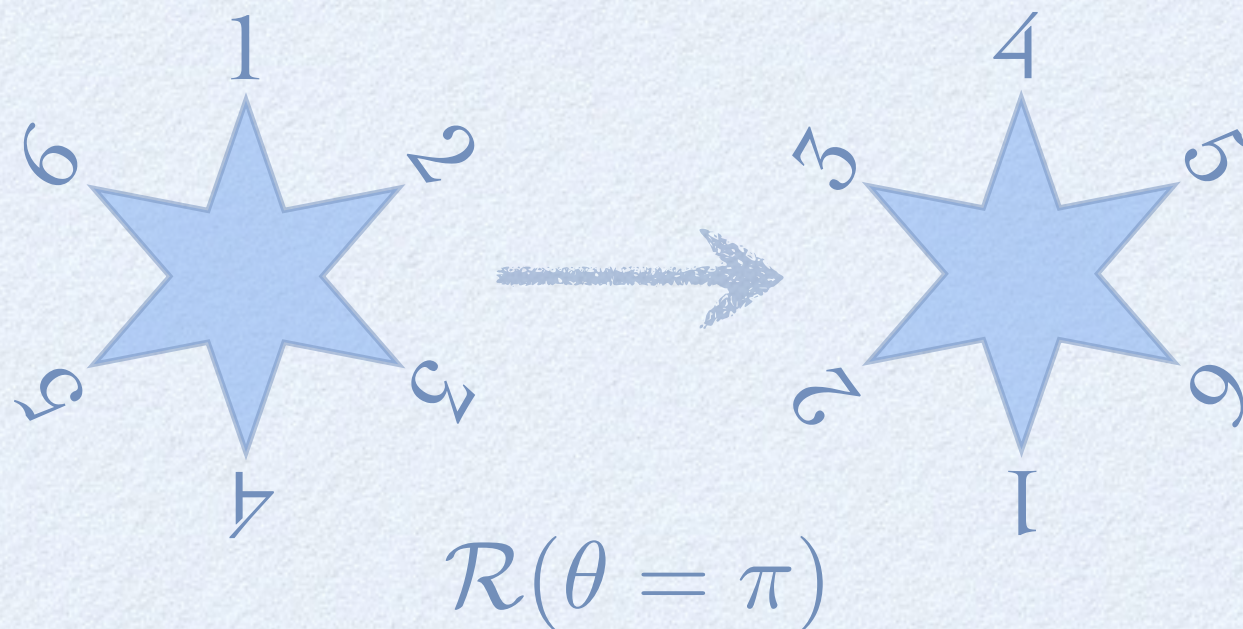


Structure de Groupe

Pour introduire la structure de groupe, on ne va pas faire du Bourbaki, mais plutôt procéder de manière pseudo empirique.

Dans un groupe:

- on peut combiner des opérations de symétrie et obtenir de nouvelles opérations de symétrie.



Structure de Groupe

Pour introduire la structure de groupe, on ne va pas faire du Bourbaki, mais plutôt procéder de manière pseudo empirique.

Dans un groupe:

 on peut combiner des opérations de symétrie et obtenir de nouvelles opérations de symétrie.

Deux aspects:

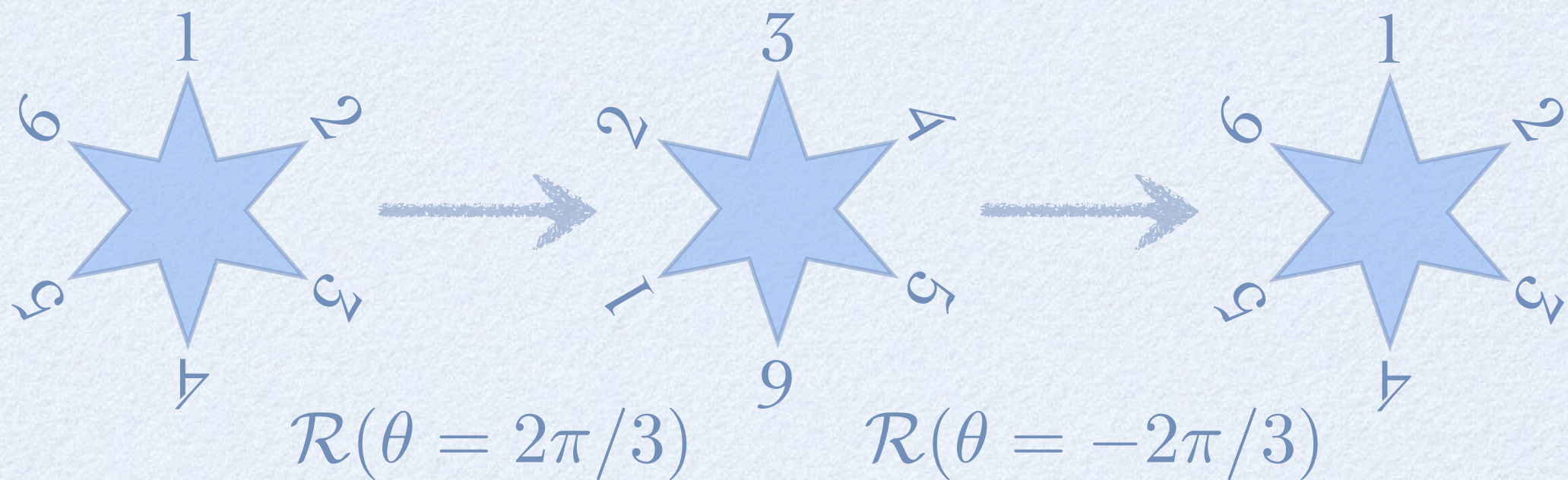
- ▶ Les combiner (loi de composition interne - attention à une erreur fréquente dans les textbooks).
- ▶ L'ensemble est stable (clos).

Structure de Groupe

Pour introduire la structure de groupe, on ne va pas faire du Bourbaki, mais plutôt procéder de manière pseudo empirique.

Dans un groupe :

🕒 ce qui est fait peut être défait.



► Toute action possède un inverse (pour la loi qu'on utilise).

Structure de Groupe

Pour introduire la structure de groupe, on ne va pas faire du Bourbaki, mais plutôt procéder de manière pseudo empirique.

Dans un groupe :

 la loi est associative.

$$(\mathcal{R}(\theta_1) \cdot \mathcal{R}(\theta_2)) \cdot \mathcal{R}(\theta_3) = \mathcal{R}(\theta_1) \cdot (\mathcal{R}(\theta_2) \cdot \mathcal{R}(\theta_3))$$

► Condition forte pour faire du calcul (algèbre).

Structure de Groupe

Donc un groupe, c'est un couple (G, μ) où:

- 1 - G est un ensemble
- 2 - G est muni d'une application $\mu : G \times G \rightarrow G$
(loi de composition interne qui laisse l'ensemble stable)
- 3 - pour tout a, b, c dans G , la relation $\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$
est satisfaite (c'est l'associativité)
- 4 - il existe e dans G , tel que pour tout a dans G , la relation
 $\mu(e, a) = \mu(a, e) = a$ est satisfaite (c'est l'élément neutre)
- 5 - pour tout a dans G , il existe b dans G tel que
 $\mu(b, a) = \mu(a, b) = e$ est satisfaite (c'est l'inverse)

Structure de Groupe

Pour alléger les écritures, on adopte souvent la notation multiplicative pour la loi de composition

$$\mu(a, b) = ab$$

$$\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c)) \text{ devient } (ab)c = a(bc)$$

Mais attention! Ce n'est qu'une notation...

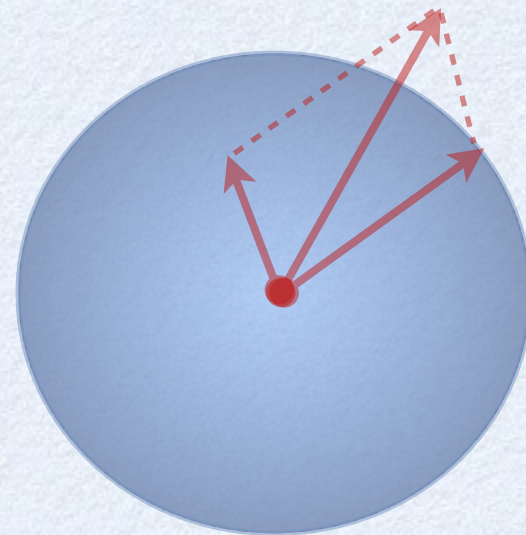
Exercice : combien d'éléments neutres et d'inverses?

Structure de Groupe

Exemples (relatifs à la stabilité):

$(\mathbb{Z}^-, \times)$ n'est pas stable : $-2 \times -3 = 6 \notin \mathbb{Z}^-$

$(S_2, +)$ n'est pas stable :



$(S_3, +)$ n'est pas stable.

$(S_3, \times)$ est stable : $\|u \times v\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \leq 1$

$(S_3, \cdot)$ n'est pas stable.

Structure de Groupe

Exemples (relatifs à l'associativité):

$(\mathbb{R}^-, -)$: non associatif. $(5-3)-2=0$; $5-(3-2)=4$; et bien sur $0 \neq 4$!

$(\mathbb{R}^*, /)$: non associatif. $(5/3)/2=0.83\dots$; $5/(3/2)=3.33\dots$

$(\mathbb{Z}, +)$: associatif.

$(GL(3, \mathbb{R}), .)$: associatif. Induit par la structure de corps de $\mathbb{R}$.

Exemples (relatifs à l'identité):

$(GL(2, \mathbb{R}), .)$: possède un élément neutre. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(S_3, \times)$: pas d'élément neutre.

Structure de Groupe

Exemples (relatifs à l'inverse):

$(\mathbb{N}, +)$: pas d'inverse.

$(\mathbb{Z}, +)$: possède des inverses.

(en fait, beaucoup d'extensions au système de numération ont été faites pour créer des inverses)

$(\mathbb{Z}^*, \times)$: pas d'inverse.

$(\mathbb{Q}^*, \times)$: possède des inverses.

$(M(2, \mathbb{R}), \cdot)$: pas d'inverse. (toutes les matrices singulières posent problème).

$(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$: possède des inverses.

Structure de Groupe

Un exemple de groupe: $(GL(n, \mathbb{R}), .)$

- ▶ loi de composition interne : « $.$ »
- ▶ stabilité : oui (car $\det(AB) = \det(A)\det(B)$).
- ▶ inverse : oui.
- ▶ élément neutre : oui, c'est $\mathbb{I}_n$.
- ▶ associativité : oui.

Structure de Groupe

Une remarque algébrique: qu'elle est la solution de l'équation

$$a.x = b$$

Supposons que a et b sont des éléments d'un groupe où la loi est notée « $\cdot$ ».

On cherche un élément du groupe qui, mis à la place de x , satisfait l'égalité ci-dessus.

c , l'inverse de a existe et l'ensemble est stable

$$c.(a.x) = c.b$$

la loi est associative

$$(c.a).x = c.b$$

par définition de l'inverse et de l'élément neutre (qui existe)

$$c.a = e$$

Structure de Groupe

l'axiome de l'élément neutre stipule que

$$e.x = x$$

on en conclue que

$$x = c.b$$

On vient de résoudre une équation sans se poser la question de ce que sont vraiment a , b et x , ni de la nature de la loi. La théorie des groupes s'occupent des structures algébriques où une telle équation est assurée d'avoir une solution, unique (cf. l'exercice précédent).

Structure de Groupe

On a vu que $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe.

On associe les noms suivants aux propriétés suivantes

symétrique	${}^tA = A$	hermitique	$A^\dagger = A$
antisymétrique	${}^tA = -A$	antihermitique	$A^\dagger = -A$
réelle	$A^* = A$	unitaire	$A^\dagger = A^{-1}$
orthogonale	${}^tA = A^{-1}$	antiunitaire	$A^\dagger = -A^{-1}$

Considérons l'ensemble des matrices orthogonales, $(O(n, \mathbb{R}), \cdot)$

Structure de Groupe

Considérons l'ensemble des matrices orthogonales, $(O(n, \mathbb{R}), .)$

- ▶ loi de composition interne : « $.$ »
- ▶ stabilité : oui : ${}^t(A.B) = {}^tB . {}^tA = B^{-1} . A^{-1} = (A.B)^{-1}$
- ▶ inverse : oui : si $B = A^{-1} \Rightarrow {}^tB = {}^t(A^{-1}) = {}^t({}^tA) = A = B^{-1}$
- ▶ élément neutre : oui, c'est $\mathbb{I}_n$.
- ▶ associativité : oui.

C'est donc un groupe. Or $(O(n, \mathbb{R}), .) \subset (GL(n, \mathbb{R}), .)$, le neutre de $(O(n, \mathbb{R}), .)$ est le neutre de $(GL(n, \mathbb{R}), .)$, la composition se fait avec la même loi dans les deux ensembles. On introduit naturellement la notion de sous groupe.

Structure de Groupe

Définition : Soit G un groupe. Un sous groupe H de G est un sous ensemble H de G tel que :

1. l'élément neutre de G est élément de H
2. pour tout a, b dans H , alors ab est dans H
3. si a est dans H , son inverse aussi

Considérons l'ensemble des matrices unitaires: $A^\dagger = A^{-1}$

Est-ce un groupe? $(U(n, \mathbb{C}), \cdot) \subset (GL(n, \mathbb{C}), \cdot)$

Exercice: 1, 2 et 3? [réponse oui]

Cet ensemble est un sous groupe du groupe linéaire, donc un groupe. On dit qu'il «hérite» d'une structure de groupe.

Structure de Groupe

Puisque $A^\dagger = A^{-1} \Rightarrow \det(A^\dagger) = \frac{1}{\det(A)}$

or $\det(A^\dagger) = \det(({}^t A)^*) = \det^*(A)$

donc $|\det(A^\dagger)| = 1$ i.e $\det(A) = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

Question: peut-on définir des (sous)-groupes plus fins, du type

$$(U^\alpha(n, \mathbb{C}), \cdot) = \{(U(n, \mathbb{C}), \cdot) \text{ " + " } \det A = e^{i\alpha}\}$$

Si $A, B \in (U^\alpha(n, \mathbb{C}), \cdot)$ alors $\det(AB) = e^{i\alpha} e^{i\alpha} = e^{i2\alpha}$

Pour avoir la stabilité, il faut qu'on ait $\alpha = 2\alpha + p2\pi \Leftrightarrow \alpha = 2p\pi$

Le seul $U^\alpha(n, \mathbb{C})$ stable par « $\cdot$ » est $U^0(n, \mathbb{C})$

$$U^0(n, \mathbb{C}) \equiv SU(n, \mathbb{C}) = \{A \in U(n, \mathbb{C}) \mid \det A = +1\}$$

Structure de Groupe

Et $(SU(n, \mathbb{C}), \cdot)$ est bien un groupe (le vérifier).

On voit que la stabilité d'un ensemble de matrices vis à vis de la contrainte sur le déterminant fait apparaître le rôle essentiel du cas où $\det(A)=+1$. On introduit naturellement

$$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det A = +1\}$$

En passant, on constate que la structure de groupe (de sous groupe) est une structure algébrique relativement exigeante.

Structure de Groupe

Exemples (exercices) de sous groupes:

- $G = (\mathbb{Z}, +)$; soit $H = \{\text{multiples de } 5\}$. H est un sous groupe de G . (On note parfois $H < G$).
- $\mathbb{N}$ n'est pas un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
- $G = (\mathbb{Q}^*, \times)$; $H = \{-1; 1\}$ est un sous groupe de G .

Structure de Groupe

Notations

Si un groupe est noté multiplicativement, alors si $a \in G$ et $n \in \mathbb{N}$
on note $a^n = \underbrace{a.a.a \dots a}_{n \text{ fois}}$

en particulier: $a^1 = a$; $a^0 = e$; $a^m a^n = a^{m+n}$

et ainsi, $a^0 a^n = a^n a^0 = a^{0+n} = a^n$

en notant $a^{-1} =$ inverse de a , alors $a^{-1} a^1 = a^0 = e$

et plus généralement, $a^{-n} = \underbrace{a^{-1}.a^{-1} \dots a^{-1}}_{n \text{ fois}}$

alors la loi des exposants est valide, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$

Structure de Groupe

Remarque:

$$(\mathbb{Z}, +) = (\{-\infty, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, \infty\}, +)$$

Tout élément de $\mathbb{Z}$ peut s'écrire 1^n avec n dans $\mathbb{Z}$.

Par exemple, $-4 = 1^{-4}$; $0 = 1^0$; $2 = 1^2$; $\dots$

Autrement dit, avec 1 et la loi «+», on peut «engendrer» tout le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On note alors $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle$.

Ce type de notations se généralise pour des groupes qui ont des relations plus complexes: $(G, o) = \langle \text{système générateur} \mid \text{relations} \rangle$.

Par exemple. $(\{-1, 1\}, \times)$ est un groupe.

On a $(\{-1, 1\}, \times) = \langle -1 \mid (-1)^2 = e \rangle$

Structure de Groupe

C'est à dire qu'on définit le groupe par un générateur, ici -1 , et des «relations» qui permettent de le construire, ici le fait que -1 au carré est égal à l'élément neutre du groupe.

Remarquez qu'on aurait aussi pu le noter $\langle a \mid a^2 = e \rangle$.

Pour les groupes finis, pourvu qu'on soit patient, on peut aussi utiliser les tables de multiplications.

Structure de Groupe

Table de multiplication usuelle

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Structure de Groupe

Table de multiplication d'un groupe fini (table de Cayley)

C_4	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

$$G = C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$$

exemple (matérialisation):

$$G = \{e^{(i0 \times \pi/2)}, e^{(i1 \times \pi/2)}, e^{(i2 \times \pi/2)}, e^{(i3 \times \pi/2)}\}$$

Structure de Groupe

$$G = C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$$

On peut aussi l'écrire: $\langle a \mid a^4 = e \rangle$

Il n'y a qu'un seul générateur: on le dit **monogène**.

Un groupe monogène, fini est dit **cyclique**.

Sur sa table de Cayley - remarques:

- ▶ tout le groupe apparaît dans chaque ligne et chaque colonne (on reviendra plus tard).
- ▶ la table est symétrique: le groupe est commutatif (abélien). 1 apparaît une fois et une seule dans chaque ligne: chaque élément possède un inverse, unique.

C_4	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

Structure de Groupe

$$G = C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$$

On peut aussi l'écrire: $\langle a \mid a^4 = e \rangle$

Il n'y a qu'un seul générateur: on le dit **monogène**.

Un groupe monogène, fini est dit **cyclique**.

Sur sa table de Cayley - remarques:

- ▶ tout le groupe apparaît dans chaque ligne et chaque colonne (on reviendra plus tard).
- ▶ la table est symétrique: le groupe est commutatif (abélien). 1 apparaît une fois et une seule dans chaque ligne: chaque élément possède un inverse, unique.

C_4	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

Structure de Groupe

$$G = C_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$$

On peut aussi l'écrire: $\langle a \mid a^4 = e \rangle$

Il n'y a qu'un seul générateur: on le dit **monogène**.

Un groupe monogène, fini est dit **cyclique**.

Sur sa table de Cayley - remarques:

- ▶ tout le groupe apparaît dans chaque ligne et chaque colonne (on reviendra plus tard).
- ▶ la table est symétrique: le groupe est commutatif (abélien). 1 apparaît une fois et une seule dans chaque ligne: chaque élément possède un inverse, unique.

C_4	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

Structure de Groupe

Table de multiplication d'un groupe fini (table de Cayley)

C_4	1	a	a	a
1	1	a	a	a
a	a	a	a	1
a	a	a	1	a
a	a	1	a	a

C_4	1	a	a	a
1	1	a	a	a
a	a	a	a	1
a	a	a	1	a
a	a	1	a	a

?	1	a
1	1	a
a	a	1

$\equiv$

C_2	1	a
1	1	a
a	a	1

Structure de Groupe

Table de multiplication d'un groupe fini (table de Cayley)

C_4	1	a	a	a
1	1	a	a	a
a	a	a	a	1
a	a	a	1	a
a	a	1	a	a

C_2	1	a
1	1	a
a	a	1

Donc $C_2 = \langle a \mid a^2 = e \rangle$ qui est un groupe «d'ordre» 2, est un sous groupe de C_4 qui est un groupe «d'ordre» 4.

L'ordre d'un groupe est son cardinal: cardinal de $G = \#G = |G|$

Structure de Groupe

Dans C_4 , a est d'ordre 4, c'est à dire le plus petit entier naturel n tel que $a^n = e$.

Il est naturel de définir l'ordre d'un élément, parce que tout élément d'un groupe G définit un sous groupe de G , qui est cyclique (le vérifier).

On remarque que $2|4$. Si on passait un peu plus de temps à étudier l'ordre des groupes finis, et leurs sous groupes, on verrait que systématiquement, quand $H < G$, $\#H \mid \#G$.

On le reverra dans la suite.

Structure de Groupe

Table de multiplication d'un groupe fini (table de Cayley)

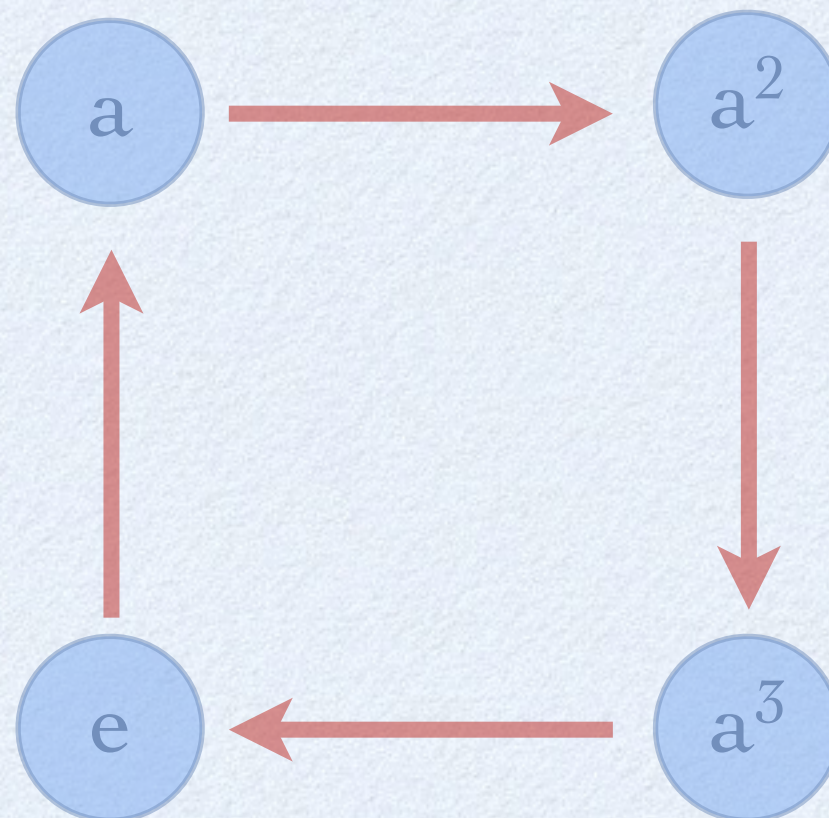
C_4	1	a	a	a
1	1	a	a	a
a	a	a	a	1
a	a	a	1	a
a	a	1	a	a

Nous pouvons aussi représenter géométriquement les groupes finis : diagrammes de Cayley. Le groupe est engendré par son système de générateur. A partir de ce système, et des relations entre eux, on peut tout construire.

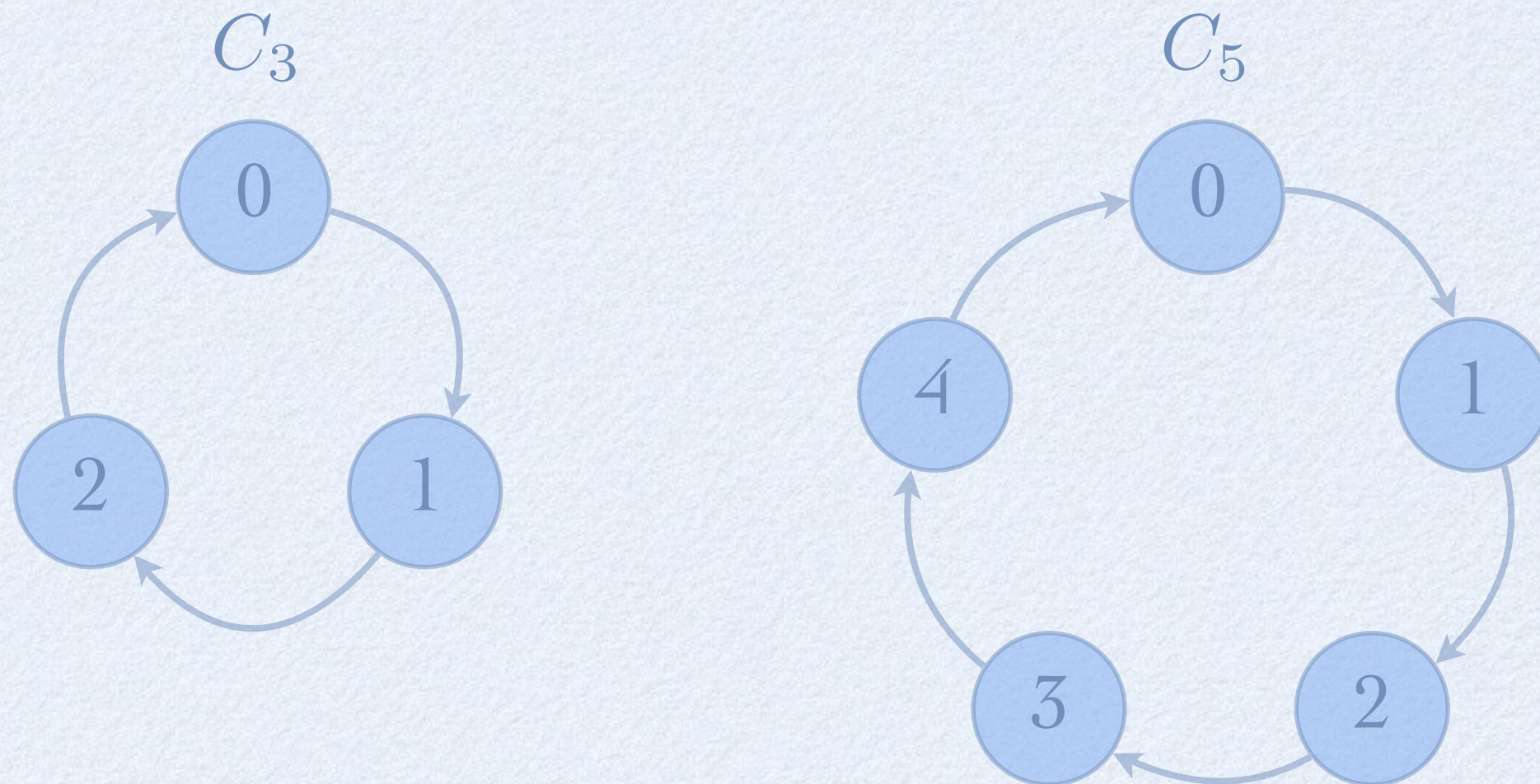
Chaque noeud du diagramme désigne un élément du groupe. Chaque générateur est décrit par une flèche distinctive.

Structure de Groupe

$$C_4 = \langle a \mid a^4 = e \rangle$$



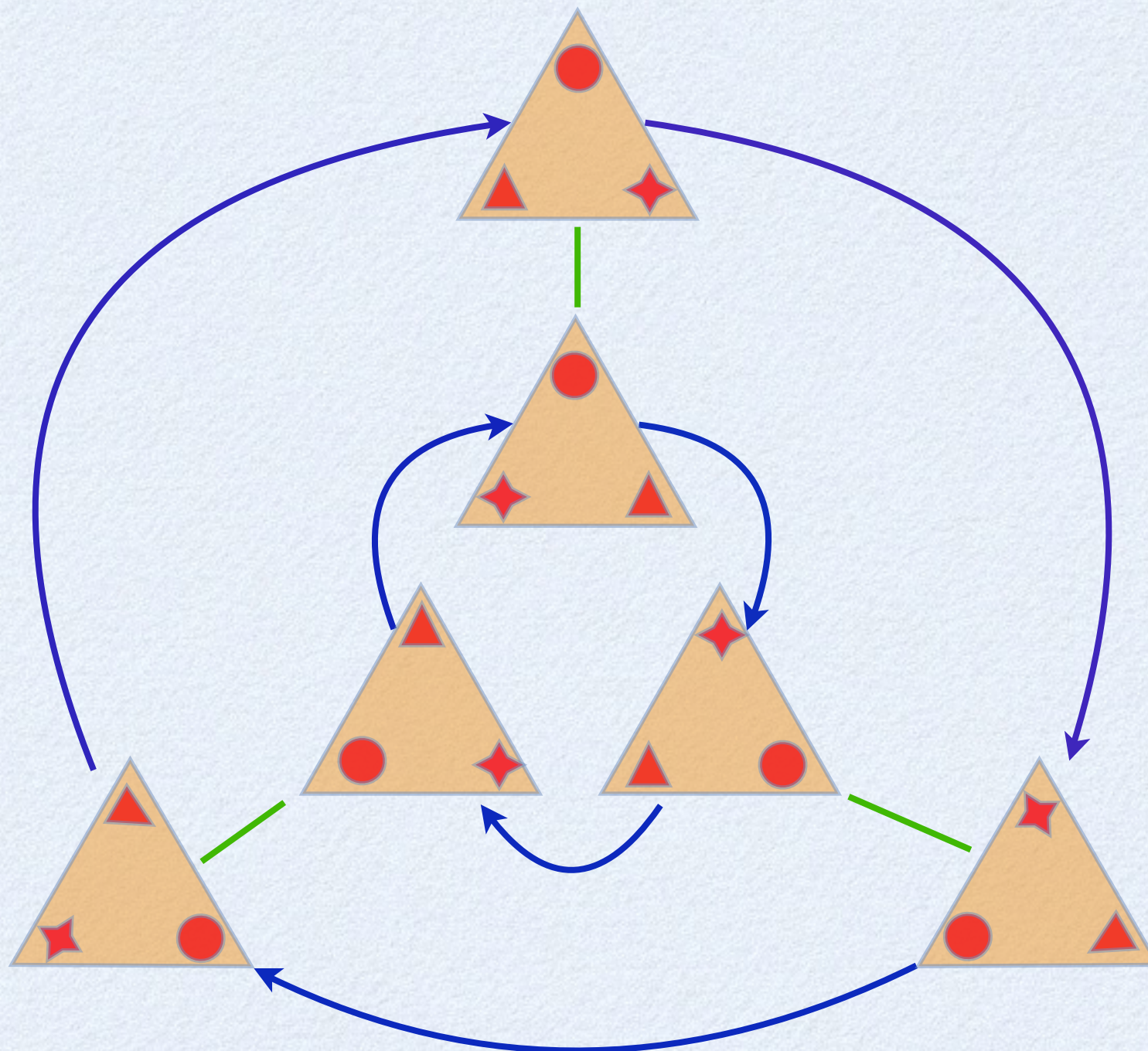
Structure de Groupe



On image ainsi le groupe cyclique (d'ordre n).

Structure de Groupe

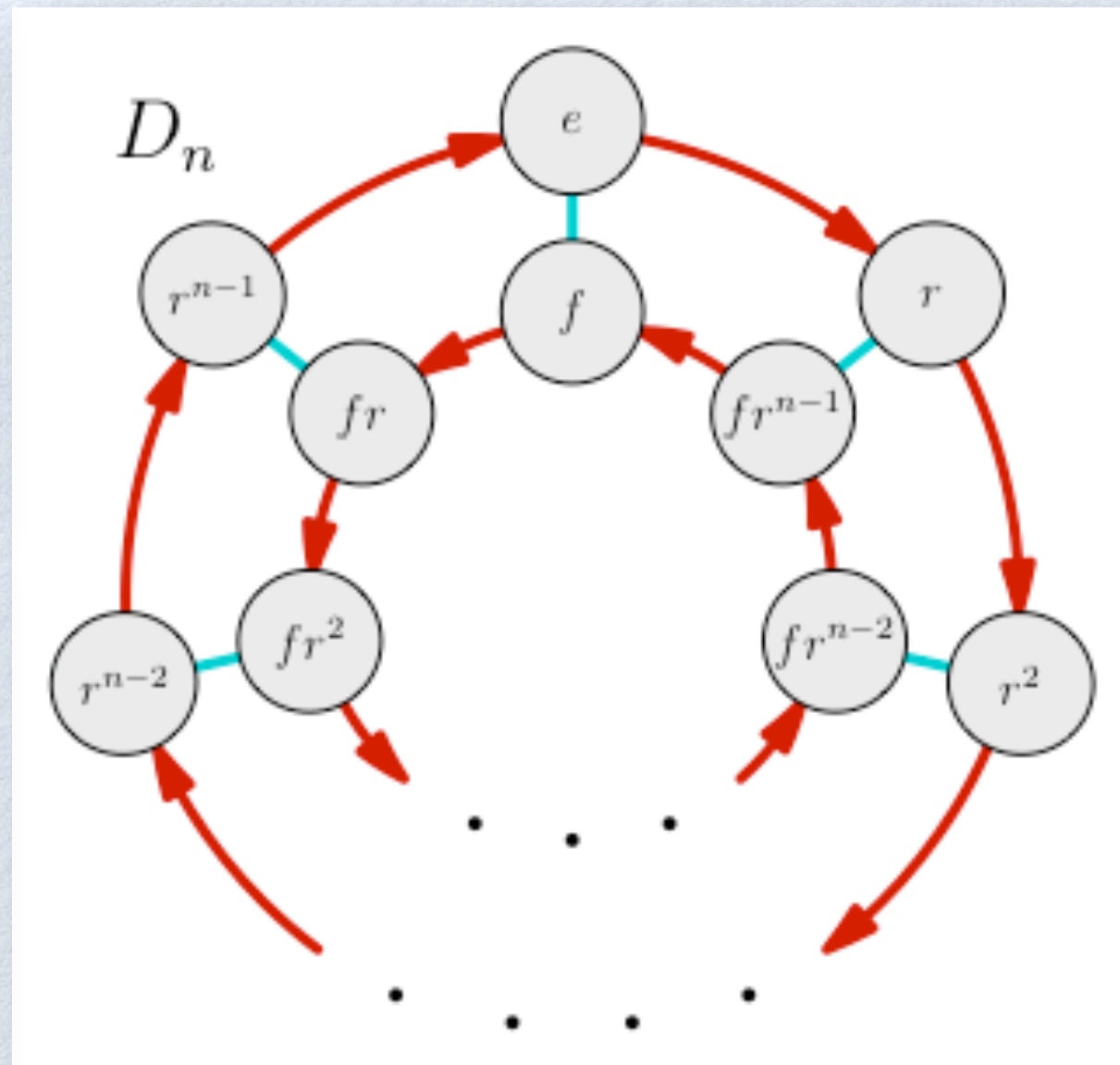
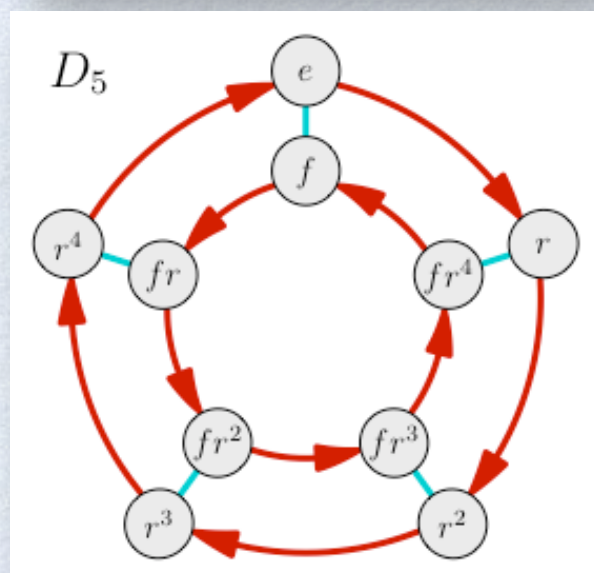
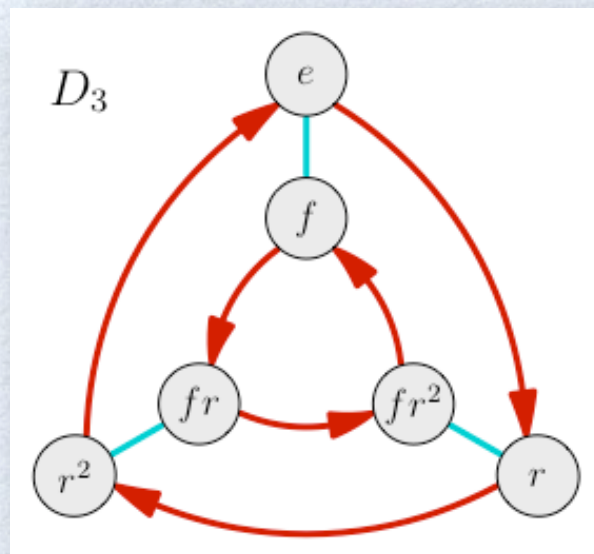
On peut également représenter des groupes plus «complexes».
Exemple : le groupe de symétrie du triangle équilatéral.



Structure de Groupe

Ce sont les groupes «Diédraux»

$$D_n = \langle r, f \mid r^n = e, f^2 = 1, frf = r^{-1} \rangle$$



Structure de Groupe

Pour les groupes, notamment finis, la notion de générateur est importante.

Les groupes précédents sont **discret**. On peut aussi envisager la notion de générateur pour les groupes **continus**.

Exemple de G , groupe des rotations 3D autour de l'axe (Oz).
Dans une base bien choisie, ces opérations prennent la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - Posons } L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Structure de Groupe

Alors

$$(i\varphi L_3)^{(n=2k>0)} = \begin{pmatrix} (-1)^k \varphi^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k \varphi^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(i\varphi L_3)^{(n=2k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \varphi^{2k+1} & 0 \\ (-1)^{k+1} \varphi^{2k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si bien que

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} (i\varphi L_3)^n = \exp(i\varphi L_3) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Structure de Groupe

Autrement dit, tout élément de G , le groupe des rotations autour de l'axe (Oz) , est une fonction de L_3 ; on a envie d'écrire, comme pour les groupes discrets :

$$G = \langle L_3 \rangle$$

On appelle ces groupes continus des groupes de Lie.

Dans le cadre des représentations, on ne s'intéressera qu'aux groupes discrets.

Remarque : revenons dans le plan 2D et intéressons nous aux rotations 2D, autour de l'origine O , indexées par un angle:

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Structure de Groupe

Comparons ce groupe des rotations aux groupes des nombres complexes de module 1.

$$(\{\mathcal{R}(\theta)\}, .)$$

$$(\{e^{i\theta}\}, \times)$$

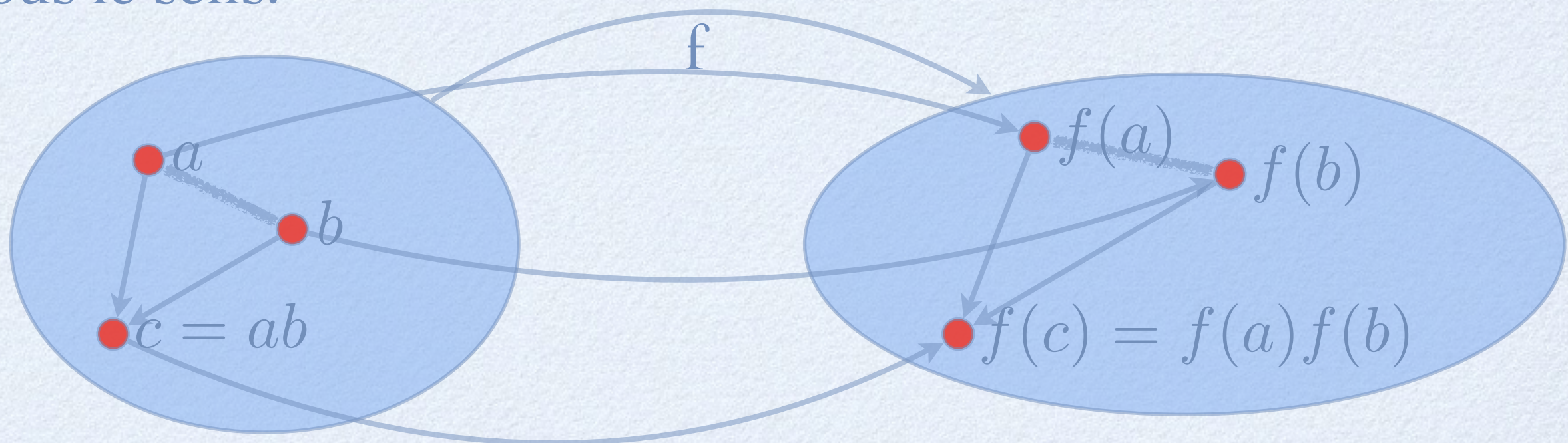
$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\theta_1) \cdot \mathcal{R}(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} & e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 + \theta_2 & \sin \theta_1 + \theta_2 \\ -\sin \theta_1 + \theta_2 & \cos \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{R}(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

L'impression est forte que malgré la «forme» de leurs éléments respectifs, ces éléments peuvent être mis en correspondance et que les règles de calcul dans ces deux groupes sont, à la «forme» près des éléments, strictement identiques.

Structure de Groupe

On peut aller au delà de ce cas particulier et se poser la question suivante : peut-on mettre en correspondance des groupes? C'est à dire, peut-on faire correspondre des éléments de deux groupes (on sait faire avec une application entre deux ensemble) en **préservant** leurs structures respectives?

Oui : c'est la notion d'homomorphisme de groupes. Ce qui est requis tombe sous le sens.



Structure de Groupe

Définition : G_1, G_2 deux groupes, $f : G_1 \rightarrow G_2$ une application.

Alors f est un **homomorphisme** de groupe si

$$\forall a, b \in G_1, f(ab) = f(a)f(b)$$

Attention! les lois ne sont pas les mêmes...

Exemple 1 : $G_1 = G_2 = (\mathbb{Z}, +)$. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto 5n$

c'est bien un homomorphisme de groupes

Exemple 2 : $G_1 = G_2 = (\mathbb{Z}, +)$. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $n \mapsto n + 3$

ce n'est pas un homomorphisme de groupes

Structure de Groupe

Exemple 3 : $G_1 = (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, $G_2 = (\mathbb{R}_*, \times)$

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

$$A \mapsto \det A$$

c'est bien un homomorphisme de groupes

Exercice : si $f : G_1 \rightarrow G_2$ est un homomorphisme de groupes.

1 – $f(e_1) = e_2$

2 – $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

3 – $\text{Im } f = \{g_2 \in G_2 \mid \exists g_1 \in G_1 ; f(g_1) = g_2\}$
est un sous groupe de G_2 .

Structure de Groupe

Définition : si $f : G_1 \rightarrow G_2$ est un homomorphisme bijectif, on dit que G_1 et G_2 sont isomorphes.

C'est à dire qu'au notations près, ce sont les **mêmes**.

Ces applications (les isomorphismes) possèdent aussi une structure algébrique.

Définition : E un ensemble, alors le groupe des permutations de E est l'ensemble des bijections, $\sigma : E \rightarrow E$. On le note σ_E .

Définition : Soit G un groupe. On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des isomorphismes de G dans G (les automorphismes).

Alors $\text{Aut}(G)$ est un sous groupe de σ_E .

Structure de Groupe

Définition : Soit G un groupe et $a \in G$.

Alors Int_a est l'automorphisme de G défini par

$$\begin{aligned}\text{Int}_a &: G \rightarrow G \\ g &\mapsto aga^{-1}\end{aligned}$$

$$\text{Int}(G) = \text{Aut}_{\text{Int}}(G) \subset \text{Aut}(G) \subset \sigma_G$$

Structure de Groupe

Pourquoi se «fatiguer» à énumérer les différentes correspondances possibles entre un ensemble et lui même, correspondances qui ne font que renommer les choses puisque la structure algébrique reste la même, ce sont des iso-morphismes?

Parce que nous allons voir que dans notre monde, nous ne voyons que «l'action» d'un groupe sur notre espace, c'est à dire des applications qui permutent des éléments de notre espace, et qui ont le bon goût de «mimer» une structure de groupe. Or si on change la base de notre espace, on ne change pas profondément les modifications, on les réétiquette (ce sont les similitudes matricielles, c'est-à-dire que derrière, il y a un automorphisme intérieur!).

Action de Groupe sur un Ensemble

Pour aller plus loin, il faut introduire la notion de relation d'équivalence. C'est à dire, il faut introduire une relation binaire qui classe, sans ambiguïté, des paquets de «choses».

Définition : une **partition** de E est un ensemble Π de parties de E , tel que :

$$1 - \forall A \in \Pi, A \neq \emptyset$$

$$2 - \forall A, B \in \Pi, A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A = B$$

$$3 - \cup_{A \in \Pi} A = E$$

Action de Groupe sur un Ensemble

Exemples :

1) $E = \{a, b, c\}$; $\Pi = \{\{a, b\}, \{c\}\}$ est une partition de E .

2) $E = \mathbb{Z}$

$\bar{0} = \{5n, n \in \mathbb{Z}\}$; $\bar{1} = \{5n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$;

$\bar{2} = \{5n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$; $\bar{3} = \{5n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$;

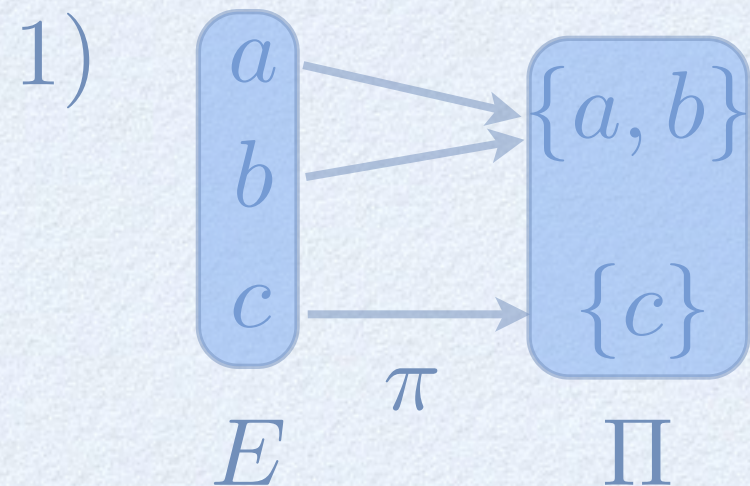
$\bar{4} = \{5n + 4, n \in \mathbb{Z}\}$;

Alors $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.

Action de Groupe sur un Ensemble

Remarque : toute partition Π de E définit une «projection canonique», $\pi : E \rightarrow \Pi$ par $\pi(a) =$ l'unique élément A dans Π qui contient a .

Pour les exemples précédents, on aurait :



$$\begin{aligned}\pi(a) &= \pi(b) = \{a, b\} \\ \pi(c) &= \{c\}\end{aligned}$$

Action de Groupe sur un Ensemble

Remarque : toute partition Π de E définit une «projection canonique», $\pi : E \rightarrow \Pi$ par $\pi(a) =$ l'unique élément A dans Π qui contient a .

Pour les exemples précédents, on aurait :

$$2) \quad \pi : \mathbb{Z} \rightarrow \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

$$3 \mapsto \bar{3}$$

$$8 \mapsto \bar{3}$$

$$-4 \mapsto \bar{1}$$

$$-11 \mapsto \bar{4}$$

Cette projection canonique $\pi : E \rightarrow \Pi$ est surjective.

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : un système de représentants pour Π est une application $\rho : \Pi \rightarrow E$ telle que $\pi \circ \rho = \text{id}_\Pi$.

Ce qui revient, pour chaque élément A de Π à choisir $\rho(A) \in A$.

Pour les exemples précédents, on aurait :

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho : \{a, b\} &\mapsto b \\ &\{c\} \mapsto c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \rho : \bar{0} &\mapsto 0 \\ &\bar{1} \mapsto 1 \\ &\bar{2} \mapsto 2 \\ &\bar{3} \mapsto 3 \\ &\bar{4} \mapsto 4 \end{aligned} \quad (\text{comme sur une montre})$$



Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : Soit E un ensemble. Une **relation d'équivalence** R sur E est une relation binaire $\mathcal{R} : E \times E \rightarrow \{T, F\}$ telle que

- 1) $\forall a; \mathcal{R}(a, a) = T$ (réflexive)
- 2) $\forall a, b; \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow \mathcal{R}(b, a)$ (symétrique)
- 3) $\forall a, b, c; \mathcal{R}(a, b) \text{ et } \mathcal{R}(b, c) \Rightarrow \mathcal{R}(a, c)$ (transitive)

Exemple : $E = \mathbb{Z}$. $\mathcal{R} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{T, F\}$ telle que,

$$\mathcal{R}(a, b) = T \Leftrightarrow 5|b - a$$

(exercice) c'est bien une relation d'équivalence.

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : Soit E un ensemble et R une relation d'équivalence sur E . Alors si a est un élément de E , la classe de a modulo R est l'ensemble

$$\bar{a}^R = \{b \in E \mid \mathcal{R}(a, b) = T\}$$

Exercice : alors l'ensemble des classes d'équivalence constitue une partition de E , en classes d'équivalence.

Exemple : $E = \mathbb{Z}$. $\mathcal{R}(a, b) = T \Leftrightarrow 5 \mid b - a$

$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} =$ l'ensemble des classes d'équivalence.

On l'appelle ensemble quotient de E par R et on le note $E/\mathcal{R}$.

$$\text{Ici, } \mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

Action de Groupe sur un Ensemble

Exemple (important) : Soit G un groupe et H un sous groupe de G . Alors H définit deux relations d'équivalence

$$\mathcal{R}_g^H(a, b) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

$$\mathcal{R}_d^H(a, b) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

Remarque : la division par 5 est bien de ce type. Le groupe G est $\mathbb{Z}$, le sous groupe H est $5\mathbb{Z}$ (vérifiez que c'est bien un sous groupe de $\mathbb{Z}$), et la loi de composition est l'addition; on a donc la traduction

$$\mathcal{R}_g^{5\mathbb{Z}}(a, b) \Leftrightarrow b - a \in 5\mathbb{Z} \Leftrightarrow 5|b - a$$

C'est précisément ce qu'on avait écrit.

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : l'ensemble des classes d'équivalence à gauche modulo H dans G est noté G/H et l'ensemble des classes d'équivalence à droite modulo H dans G est noté $H \backslash G$.

Proposition (exercice) : Soit G un groupe, H un sous groupe de G . Alors la classe d'équivalence à gauche de a modulo H dans G est,

$${}^H \bar{a}^g = aH = \{ah \text{ t.q. } h \in H\}$$

De même,

$${}^H \bar{a}^d = Ha = \{ha \text{ t.q. } h \in H\}$$

Action de Groupe sur un Ensemble

Exemple : $G=S_3$, le groupe des permutations à trois éléments.

$$G = \{id, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, (123), (132)\}$$

$$H = \{id, \tau_{12}\} \quad [\text{c'est bien un sous groupe de } G]$$

o	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	(123)	(132)
id	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	(123)	(132)
τ_{12}	τ_{12}	id	(132)	(123)	τ_{23}	τ_{13}
τ_{13}	τ_{13}	(123)	id	(132)	τ_{12}	τ_{23}
τ_{23}	τ_{23}	(132)	(123)	id	τ_{12}	τ_{13}
(123)	(123)	τ_{13}	τ_{23}	τ_{12}	(132)	id
(132)	(132)	τ_{23}	τ_{12}	τ_{13}	id	(123)

Action de Groupe sur un Ensemble

Exemple : classes à gauche modulo H (ce sont des aH).

$$a = id \quad \text{blue box} \quad aH = H \quad a = \tau_{13} \quad \text{green box} \quad aH = \{\tau_{13}, (123)\}$$

$$a = \tau_{23} \quad \text{red box} \quad aH = \{\tau_{23}, (132)\}$$

o	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	(123)	(132)
id	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	(123)	(132)
τ_{12}	τ_{12}	id	(132)	(123)	τ_{23}	τ_{13}
τ_{13}	τ_{13}	(123)	id	(132)	τ_{12}	τ_{23}
τ_{23}	τ_{23}	(132)	(123)	id	τ_{12}	τ_{13}
(123)	(123)	τ_{13}	τ_{23}	τ_{12}	(132)	id
(132)	(132)	τ_{23}	τ_{12}	τ_{13}	id	(123)

Action de Groupe sur un Ensemble

On obtient bien une partition de H ,

$$H = id\ H \cup \tau_{13}\ H \cup \tau_{23}\ H$$

Et l'ensemble quotient est,

$$G/H = S_3/\{id, \tau_{12}\} = \{id\ H, \tau_{13}\ H, \tau_{23}\ H\}$$

Action de Groupe sur un Ensemble

Passons aux classes à droite modulo H (ce sont les Ha).

$$a = id \quad \text{[blue box]} \quad Ha = H \quad a = \tau_{13} \quad \text{[green box]} \quad Ha = \{\tau_{13}, (132)\}$$

$$a = \tau_{23} \quad \text{[red box]} \quad Ha = \{\tau_{23}, (123)\}$$

$\circ$	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	(123)	(132)
id	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	(123)	(132)
τ_{12}	τ_{12}	id	(132)	(123)	τ_{23}	τ_{13}
τ_{13}	τ_{13}	(123)	id	(132)	τ_{12}	τ_{23}
τ_{23}	τ_{23}	(132)	(123)	id	τ_{12}	τ_{13}
(123)	(123)	τ_{13}	τ_{23}	τ_{12}	(132)	id
(132)	(132)	τ_{23}	τ_{12}	τ_{13}	id	(123)

Action de Groupe sur un Ensemble

On obtient de nouveau une partition de H ,

$$H = H \operatorname{id} \cup H \tau_{13} \cup H \tau_{23}$$

Et l'ensemble quotient est,

$$H \backslash G = \{\operatorname{id}, \tau_{12}\} \backslash S_3 = \{H \operatorname{id}, H \tau_{13}, H \tau_{23}\}$$

On remarque sur cet exemple qu'en général, G/H est différent de $H \backslash G$.

On remarque également que les classes ont toutes même cardinal.

Action de Groupe sur un Ensemble

Proposition : Soit G un groupe et H un sous groupe de G . Alors toute classe à gauche aH peut être mise en correspondance bijective avec H .

De même pour les classes à droite.

Démonstration (exercice) : soit $\tau_a^g : G \rightarrow G$
$$h \mapsto a h$$

montrer que cette application est bijective. (et $\tau(H)=aH$)

Corollaire : Si G est un groupe fini et H un sous groupe de G , alors $\#H \mid \#G$. (c'est le théorème de Lagrange)

Action de Groupe sur un Ensemble

Corollaire : pour toute fonction f définie sur G , et a dans G , on a,

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{ag, g \in G} f(ag)$$

puisque $\tau_a^g : G \rightarrow G$ est bijective. (**Réarrangement**)
 $h \mapsto ah$

Action de Groupe sur un Ensemble

Soit G un groupe et H un sous groupe de G . On obtient la partition G/H .

Question : peut-on munir G/H d'une structure de groupe?

$$\bar{a} = aH \in G/H \qquad \bar{b} = bH \in G/H$$

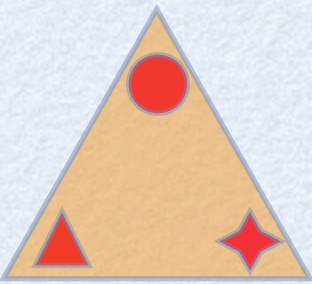
on voudrait donner du sens à $\bar{a}.\bar{b}$ avec naturellement $\bar{a}.\bar{b} = \overline{ab}$

Attention : il **faut** vérifier que

- ▶ cette définition est cohérente: elle ne dépend pas du **choix des représentants** pour aH et bH
- ▶ la **structure associée** est bien celle d'un groupe

Action de Groupe sur un Ensemble

Exemple : $G/H = S_3/\{id, \tau_{12}\} = \{id H, \tau_{13} H, \tau_{23} H\}$



$$\{id, \tau_{12}\} \quad \{\tau_{13}, (123)\} \quad \{\tau_{23}, (132)\}$$

$$id \circ \tau_{13} = \tau_{13} \Rightarrow \{id, \tau_{12}\} \cdot \{\tau_{13}, (123)\} = \{\tau_{13}, (123)\}$$

$$\tau_{12} \circ (123) = \tau_{23} \Rightarrow \{id, \tau_{12}\} \cdot \{\tau_{13}, (123)\} = \{\tau_{23}, (132)\}$$

Problème! Ici, le choix du représentant conditionne le résultat : on ne peut simplement pas faire de calcul dans G/H . (et encore moins en faire un groupe)

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : Soit G un groupe et H un sous groupe de G .
 H est un sous groupe distingué (normal) si

$$\forall a \in G, aHa^{-1} = H$$

c'est à dire,

$$\forall a \in G, \forall h \in H, aha^{-1} \in H$$

ou encore

H distingué $\Leftrightarrow H$ est globalement invariant par tout automorphisme intérieur.

Action de Groupe sur un Ensemble

Exemple : $G = S_3$; $H = \{id, \tau_{12}\}$ n'est pas distingué dans G .

$G = S_3$; $H = \{(123), (132)\}$ est distingué dans G .

Théorème : Soit G un groupe et H un sous groupe distingué dans G . (on note souvent $H \triangleleft G$)

1) $\forall a \in G; aH = Ha$

2) $G/H = H \backslash G$ est muni canoniquement d'une structure de groupe, appelée structure quotient.

Remarque : dans un groupe commutatif, tout sous groupe est distingué.

Action de Groupe sur un Ensemble

- Exemples :
- 1) $G = \mathbb{Z}$; $H = 5\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ est commutatif donc $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est muni canoniquement d'une structure de groupe.
 - 2) $G = GL(2, \mathbb{R})$; $H = O(2, \mathbb{R})$.
exercice : H n'est pas distingué dans G .
 - 3) $G = GL(2, \mathbb{R})$; $H = SL(2, \mathbb{R})$.
exercice : H est distingué dans G .

Proposition (un classique) : Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes.

Alors $\ker(f)$ est un sous groupe distingué dans G .

exercice : le montrer.

Action de Groupe sur un Ensemble

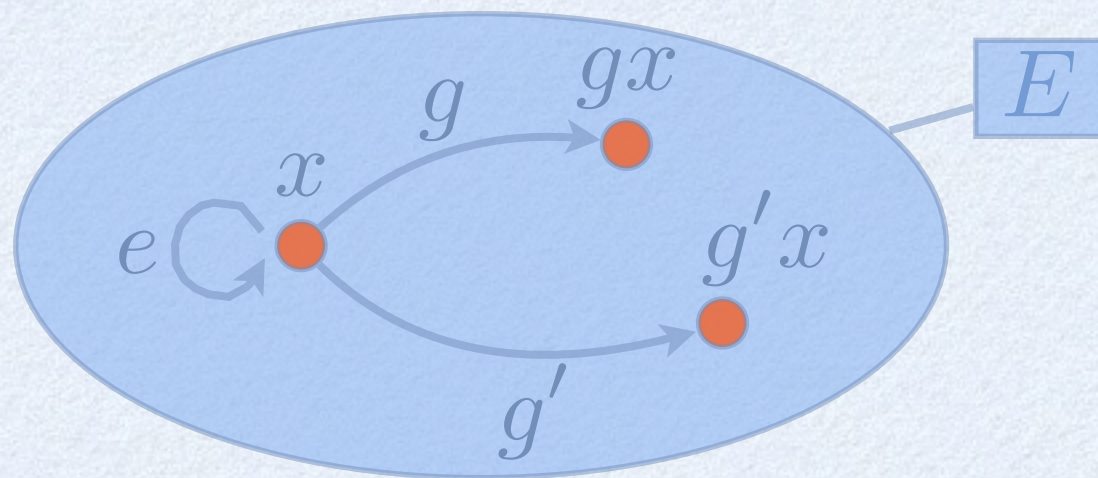
Pour résumer : on connaît la structure de groupe. Nous savons mettre des groupes en correspondance (homomorphisme). Nous connaissons la structure de sous groupe. Cette sous structure induit une partition du groupe («coarse-graining», mais pas n'importe comment). Cette partition peut, sous condition, posséder également une structure de groupe (le sous groupe doit être distingué). L'archétype du sous groupe distingué, les noyaux d'homomorphismes.

Comme promis, nous allons maintenant faire agir les groupes sur notre/un espace. Nous introduisons les «actions de groupes».

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : une action α d'un groupe G sur un ensemble E est une application $\alpha : G \times E \rightarrow E$ qui vérifie

- 1) $\forall g, g' \in G, \forall x \in E, \alpha(g, \alpha(g', x)) = \alpha(gg', x)$
- 2) $\forall x \in E, \alpha(e, x) = x$

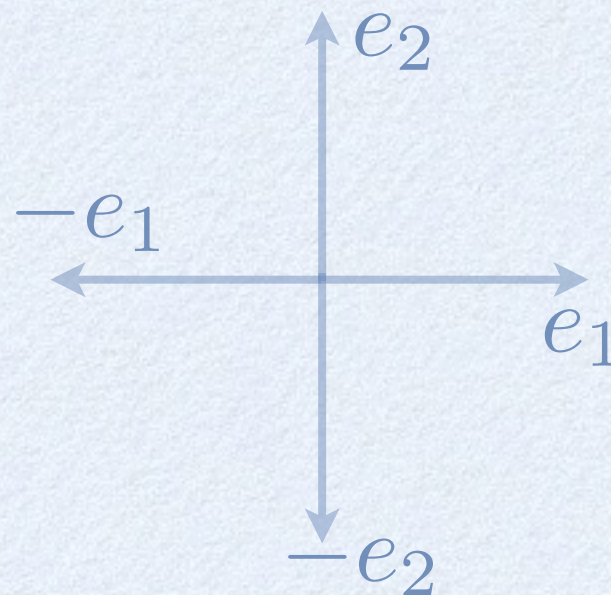


- 1) $g(g'x) = (gg')x$
- 2) $ex = x$

Une action ressemble à une loi externe sur E , à «coefficients» dans G .

Action de Groupe sur un Ensemble

Exemple : $E = \text{«carré»} = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$ où (e_1, e_2) = base canonique de $\mathbb{R}^2$.



et $G = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid G(\text{carré}) = \text{carré}\}$

Action de Groupe sur un Ensemble

Si on appelle $a = \text{rot}_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
et $b = \text{sym}_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

alors les éléments de G sont : $id, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$ avec

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; a^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; a^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; a^2b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a^3b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $G = \langle a, b \mid a^4 = e, ba = a^3b \rangle$ (c'est D_4).

Action de Groupe sur un Ensemble

$$\begin{aligned}\text{Action : } G \times \text{Carré} &\rightarrow \text{Carré} \\ (g, \pm e_i) &\mapsto g.(\pm e_i)\end{aligned}$$

Remarquez que pour définir cette action, nous avons considéré un intermédiaire. A chaque élément du groupe abstrait D_4 , nous avons associés, ad-hoc, une matrice de rotation de $\mathbb{R}^2$.

Plus finement, nous avons associé à chaque élément du groupe abstrait D_4 , un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire un homomorphisme d'espace vectoriel sur lui même), qui plus est inversible, et en munissant cet espace vectoriel d'une base arbitraire, nous avons matérialisé ces endomorphismes par des matrices carrées. Comme monsieur Jourdain, nous avons utilisé des représentations sans le savoir.

Action de Groupe sur un Ensemble

Nous aurions tout aussi bien pu faire ceci dans $\mathbb{R}^3$, et travailler avec des matrices carrées 3×3 . Cela aurait défini une action du groupe D_4 , sur le carré plongé dans $\mathbb{R}^3$.

Les matrices auraient été bloc diagonales, sauf, bien sur, si nous avions eu la malencontreuse idée de considérer une base peu adaptée.

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : une action $\alpha : G \times E \rightarrow E$

est **effective** si $\forall g \in G \setminus \{e\}, \exists x \in E$ t.q $gx \neq x$

est **transitive** si $\forall x, y \in E, \exists g \in G$ t.q $gx = y$

Autrement dit, une action est effective si à part l'élément neutre de G , tout élément de G «déplace» au moins un élément de E .

Et une action est transitive si on peut toujours passer d'un élément de E à un autre par l'action.

Action de Groupe sur un Ensemble

Soit G un groupe. Alors G est muni de trois actions canoniques.

1. action à gauche : $\lambda(g, g') = gg'$

2. action à droite : $\rho(g, g') = g'g^{-1}$

3. action de conjugaison : $\chi(g, g') = g g' g^{-1}$

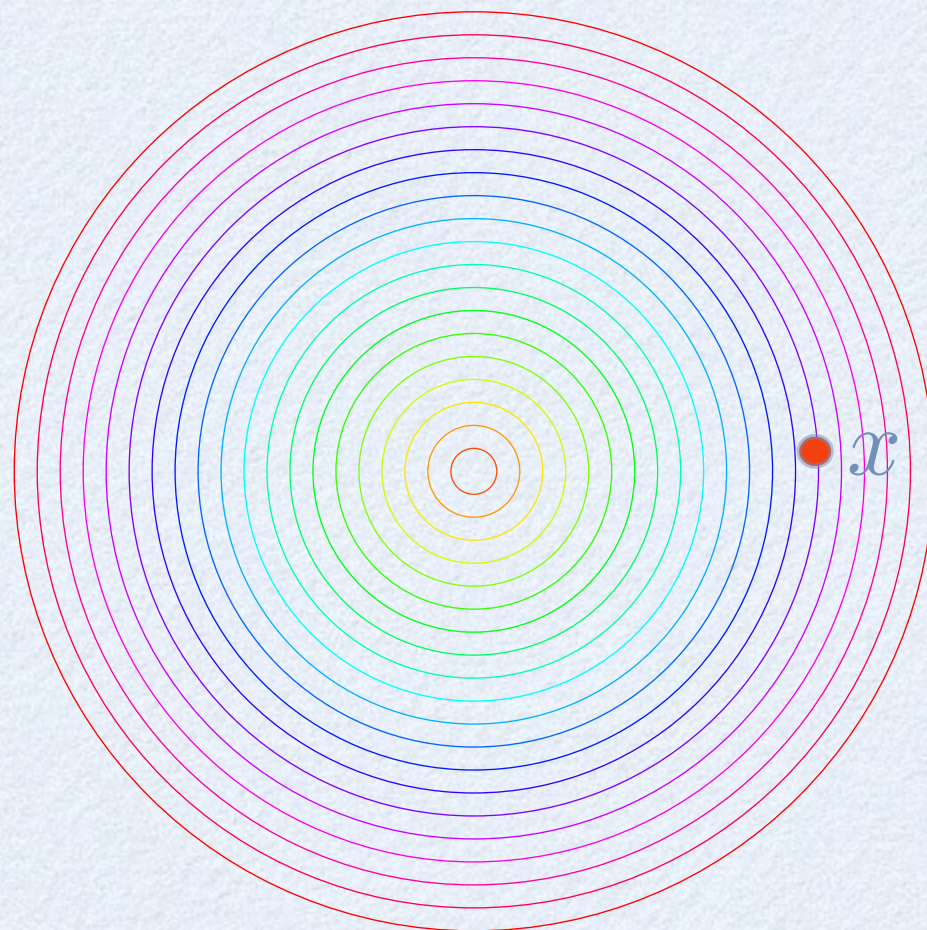
Pourquoi faire agir un groupe sur lui même? Nous y répondrons dans la partie traitant des représentations linéaires. Mais avant, donnons un exemple et quelques propriétés des actions de groupes.

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : Soit $\alpha : G \times E \rightarrow E$ une action du groupe G sur E .

Soit $x \in E$, alors $\text{Orb}(x) = \{g.x\}_{g \in G}$

Exemple : le groupe des rotations 2D.



Action de Groupe sur un Ensemble

Proposition : Soit $\alpha : G \times E \rightarrow E$ une action du groupe G sur l'ensemble E .

Alors la relation $\mathcal{R}_\alpha$ sur E , définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\alpha(x, y) = T &\Leftrightarrow \exists g \in G \text{ t.q. } g.x = y \\ &\Leftrightarrow y \in \text{Orb}(x)\end{aligned}$$

est une relation d'équivalence dont les orbites sont les classes d'équivalence.

Corollaire : Toute action $\alpha : G \times E \rightarrow E$ définit une partition de E , en orbites de l'action.

Action de Groupe sur un Ensemble

Définition : Soit $\alpha : G \times E \rightarrow E$ une action du groupe G sur E .
Soit $x \in E$. Alors $\text{Stab}_\alpha(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$
[le stabilisateur]

Proposition : pour tout x de E , $\text{Stab}_\alpha(x)$ est un sous groupe de G .
[exercice : le montrer.]

Plan

★ Introduction à la théorie des groupes (I)

- ▶ structure grossière
- ▶ structure fine
- ▶ correspondances entre groupes
- ▶ opérations d'un groupe sur un espace

★ Introduction aux représentations linéaires des groupes finis (II)

- ▶ introduction (intuition et principes)
- ▶ représentations, symétries et quelques remarques physiques
- ▶ structure des représentations
- ▶ constructions ad-hoc et propriétés algébriques
- ▶ retour à la physique

Plan - II : introduction aux représentations linéaires des groupes finis

★ Introduction

- ▶ correspondance entre un groupe et un espace vectoriel : premières définitions.
- ▶ les symétries : de vraies fausses amies.
- ▶ représentations et actions.

★ Quelques représentations fréquentes

- ▶ représentation triviale
- ▶ représentations issues du problème physique
- ▶ représentation régulière

★ Noyau dur

- ▶ équivalence entre représentations
- ▶ unitarisabilité
- ▶ invariance et (ir)réductibilité
- ▶ lemmes de Schur, orthogonalité, réduction
- ▶ projecteurs

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Un moyen naturel, pour étudier un groupe G , ou profiter des informations que son existence apporte dans tel ou tel contexte mathématique ou physique, consiste à remplacer ce groupe par un autre, avec lequel il soit en relation, et qui soit plus maniable sur le plan du calcul.

La relation entre les deux groupes doit respecter (transporter) la structure de groupe. Leur lien devrait donc être un homomorphisme. Pour être maniable dans les calculs, le nouveau groupe devrait être constitué de «nombres», réels ou complexes. Mais ne considérer uniquement que des scalaires est trop restrictif (on perdrait la non commutativité par exemple). On choisira donc des matrices à valeurs dans les nombres complexes.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Un groupe abstrait
(avec son algèbre)

relation qui préserve (+ ou -) la structure algébrique du groupe. (homomorphisme)

Un groupe de matrices
(avec son algèbre)

mais une matrice, c'est aussi la «représentation» d'un endomorphisme d'espace vectoriel. (et si l'espace est de dimension infini, les matrices sont volumineuses...)

Représentations Linéaires des Groupes Finis

On retient finalement cette notion, plus profonde (l'endomorphisme existe sans les matrices), même si dans le cas des groupes finis, et sur le plan pratique pour les calculs, nous travaillerons presque tout le temps avec «leurs» matrices.

(Première) définition : une représentation (E, ρ) d'un groupe G est une application ρ de G dans les endomorphismes de E , avec E un espace vectoriel sur K un corps, telle que,

$$\forall g_1, g_2 \in G, \rho(g_1) \rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Si on dote E d'une base $\{x^n\}_{1 \leq n \leq d < \infty}$ alors pour tout g de G ,

$$\rho(g) x^n = \sum_m \Gamma(g)_{mn} x^m$$

Les matrices associées forment un groupe, un groupe de matrices.

Définition : si l'homomorphisme est injectif, on dit que la représentation est **fidèle**.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Exemples : considérons le groupe cyclique $C_3 = \{e, a, a^2\}$.

Soit $u = e^{i2\pi/3}$; la représentation sur $\mathbb{C}^2$

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} ; \rho(a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

est fidèle. Celle-ci, encore sur $\mathbb{C}^2$

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \rho(a) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \rho(a^2) = \begin{pmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est isomorphe à la première.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Exemples : on peut aussi représenter fidèlement C_3 sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \rho(a) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \rho(a^2) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

On pourrait aussi représenter $C_2 = \{e, a\}$, par

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \rho(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquez que même si $\rho(a)$ n'est **pas** inversible en tant qu'endomorphisme, $\rho(a)$ possède un inverse dans son groupe de matrices $\{\rho(e), \rho(a)\}$: c'est lui même.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Il est donc d'usage de définir les représentations comme des homomorphismes d'un groupe abstrait dans un groupe d'endomorphismes inversibles.

(Deuxième) définition : une représentation (E, ρ) d'un groupe G est une application,

$$\begin{aligned}\rho &: G \rightarrow GL(E) \\ g &\mapsto \rho(g)\end{aligned}$$

telle que

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad \rho(g_1) \rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

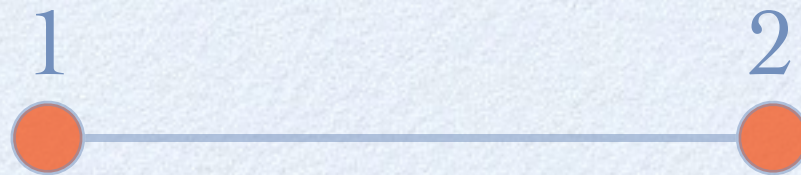
Terminologie : E est l'espace de représentation. d (infinie ou pas) est la dimension de la représentation. Si $d=1$, on dit que la représentation est scalaire.

Attention! C'est le début des confusions possibles. Quand on est physicien, le groupe qui nous intéresse est le groupe des symétries. TRES souvent, il est déjà identifié par des matrices, ce qui fait qu'on obtient naturellement une représentation fidèle du groupe. Alors, où est le problème?

Le «problème» vient du fait que les symétries sont bien «représentables» mais pour le physicien, ce sont leurs actions sur l'espace physique qui est pertinent.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

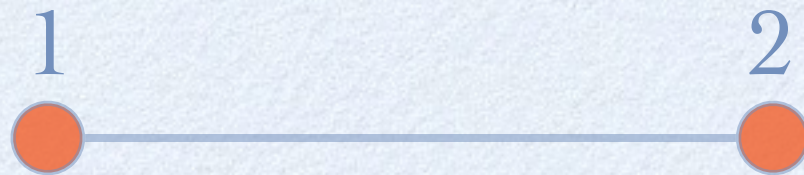
Par exemple : 2 masses identiques liées par un ressort, 2 spins $1/2$ couplés par échange, 2 sites voisins qu'un électron explore en sautant de l'un à l'autre... Où sont les points communs, les différences?



1 - cas du ressort : problème classique de vibrations. Le formalisme standard est celui de la mécanique Lagrangienne. $L=T-V$. Ce Lagrangien est invariant par permutation 1-2. Dans ce cas simple, il existe 2 degrés de liberté. L'espace vectoriel dans lequel «vit» ce problème est de dimension 2, on l'identifiera à $\mathbb{R}^2$. Donc toutes les symétries apparaîtront comme des opérateurs qui agiront à 2D.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

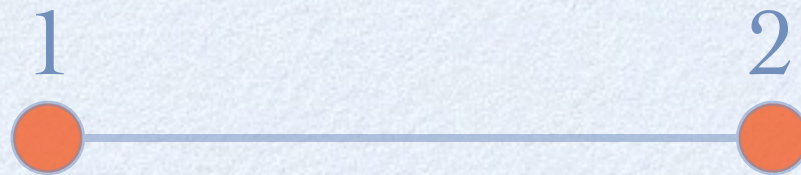
Par exemple : 2 masses identiques liées par un ressort, 2 spins $1/2$ couplés par échange, 2 sites voisins qu'un électron explore en sautant de l'un à l'autre... Où sont les points communs, les différences?



2 - cas de 2 spins $1/2$: problème quantique de magnétisme. Le formalisme standard est celui de la mécanique quantique Hamiltonienne: $\mathcal{H} = -J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$. L'espace vectoriel dans lequel «vit» ce problème est de dimension 4 : $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$. Les symétries apparaîtront comme des opérateurs qui agissent à 4D.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

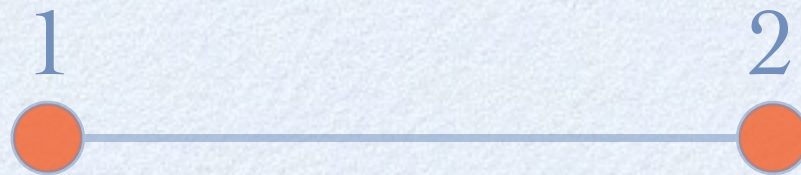
Par exemple : 2 masses identiques liées par un ressort, 2 spins $1/2$ couplés par échange, 2 sites voisins qu'un électron explore en sautant de l'un à l'autre... Où sont les points communs, les différences?



3 - cas d'un électron : problème quantique de magnétisme et de «transport». Le formalisme standard est celui de la mécanique quantique Hamiltonienne. A l'inverse des spins, les électrons anticommulent. Cet aspect doit apparaître dans les symétries...

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Par exemple : 2 masses identiques liées par un ressort, 2 spins $1/2$ couplés par échange, 2 sites voisins qu'un électron explore en sautant de l'un à l'autre... Où sont les points communs, les différences?



Et pourtant, dans chacun des cas précédents, la symétrie «visuelle» est celle de deux objets, c'est à dire celle de C_2 . Nous allons toujours garder à l'esprit que la représentation d'un groupe est seulement une étape avant de traiter le problème physique.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Pour les problèmes physique, il faudra procéder comme suit (au moins formellement). Analyser le problème physique et ses symétries. Identifier le groupe abstrait qui sous-tend ces symétries. Indépendamment de la physique, mettre en route l'outillage des représentations pour trouver (c'est le but de cette introduction) les briques élémentaires qui les constituent, et enfin (c'est notre objectif physique), comprendre le lien entre les représentations linéaires du groupe et le problème d'intérêt : champ cristallin, hamiltonien de spin, ordres magnétiques observés vs possibles, liaisons fortes, vibrations, ...

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Remarquons également que par définition, une représentation de groupe est un

$$\begin{aligned}\rho : G &\longrightarrow GL(E) \\ g &\longmapsto \rho(g)\end{aligned}$$

$$\forall g_1, g_2 \in G, \rho(g_1) \rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$$

Donc si on définit $g.v := \rho(g).v$, $\forall g \in G, \forall v \in E$

Alors on a automatiquement $g.(g'.v) = (g g').v$; $e.v = v$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

C'est à dire qu'on a une action du groupe G sur E ! La boucle est bouclée : on sait caractériser la structure (intrinsèque) de groupe, nous sommes familiers des espace vectoriels et des espaces de Hilbert (qui sont aussi vectoriels), et nous venons de formaliser l'action d'un groupe abstrait (via les représentations) sur de tels espaces.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Nous allons «dérouler» ce qu'on sait sur les groupes :

- ▶ relations d'équivalence (en particulier la conjugaison), pour les représentations comme pour les éléments.
- ▶ classes d'équivalence (idem: représentations et éléments)
 - ◎ plusieurs représentations se «ressemblent».
 - ◎ dans une représentation, les éléments se regroupent.
- ▶ orbites, stabilisateurs,...
- ▶ sous groupes, quotient,...

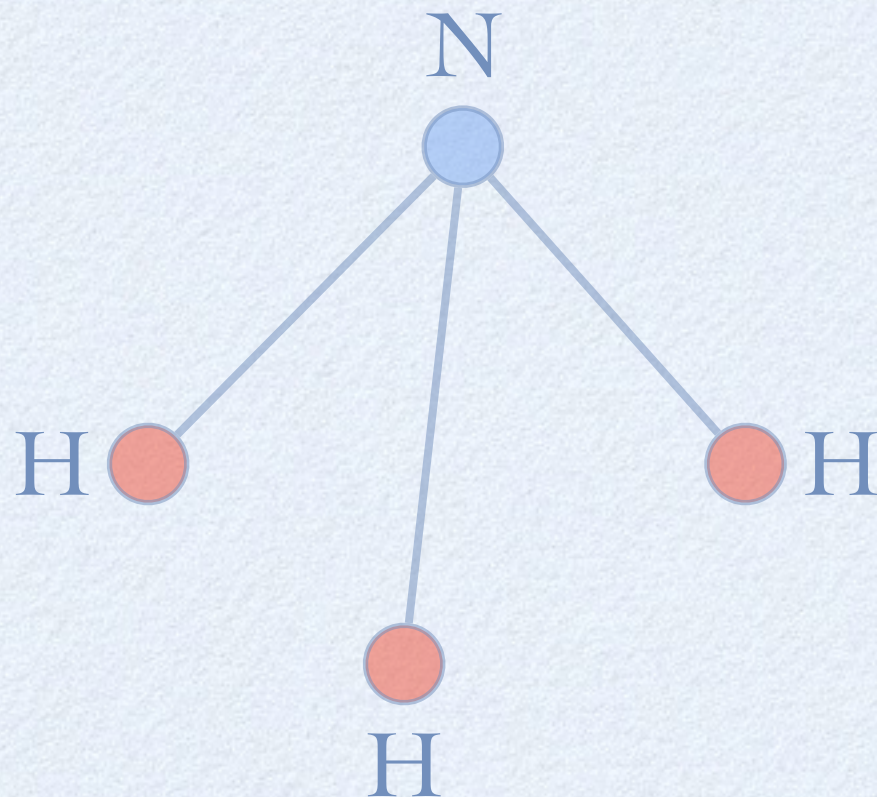
Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

La représentation triviale

$$\forall g \in G, \rho(g) = 1$$

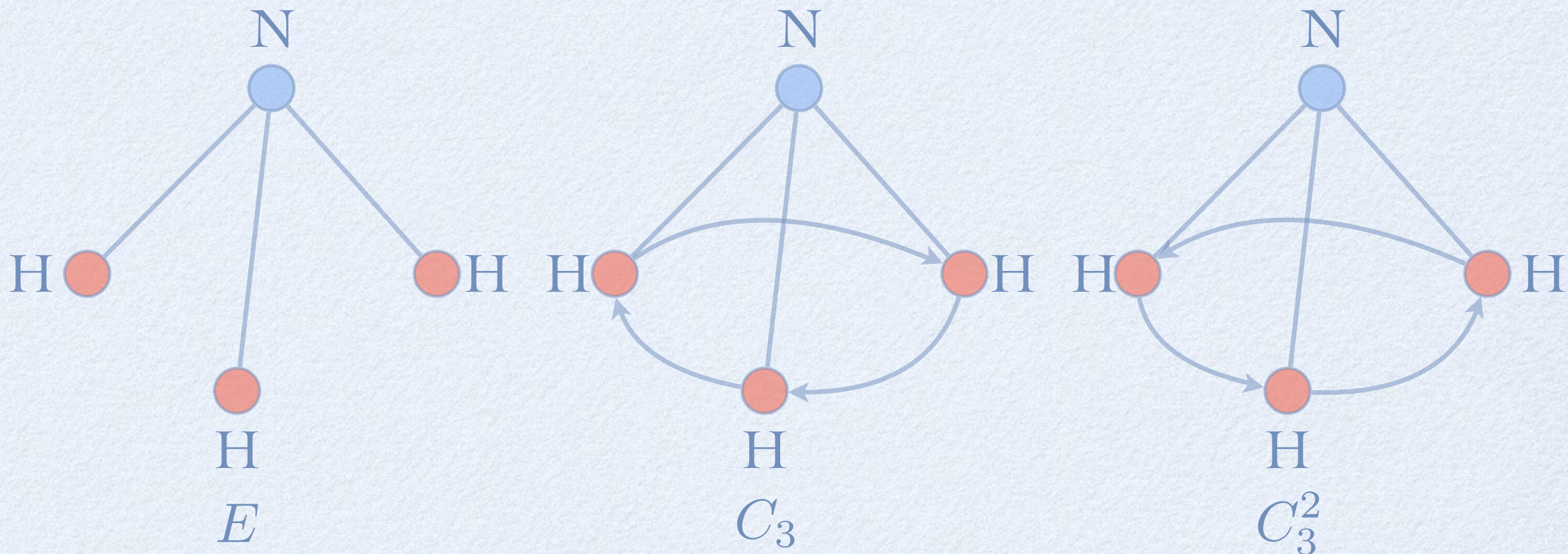
Elle gomme la structure de G . Soit, mais a-t-elle du sens?



Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

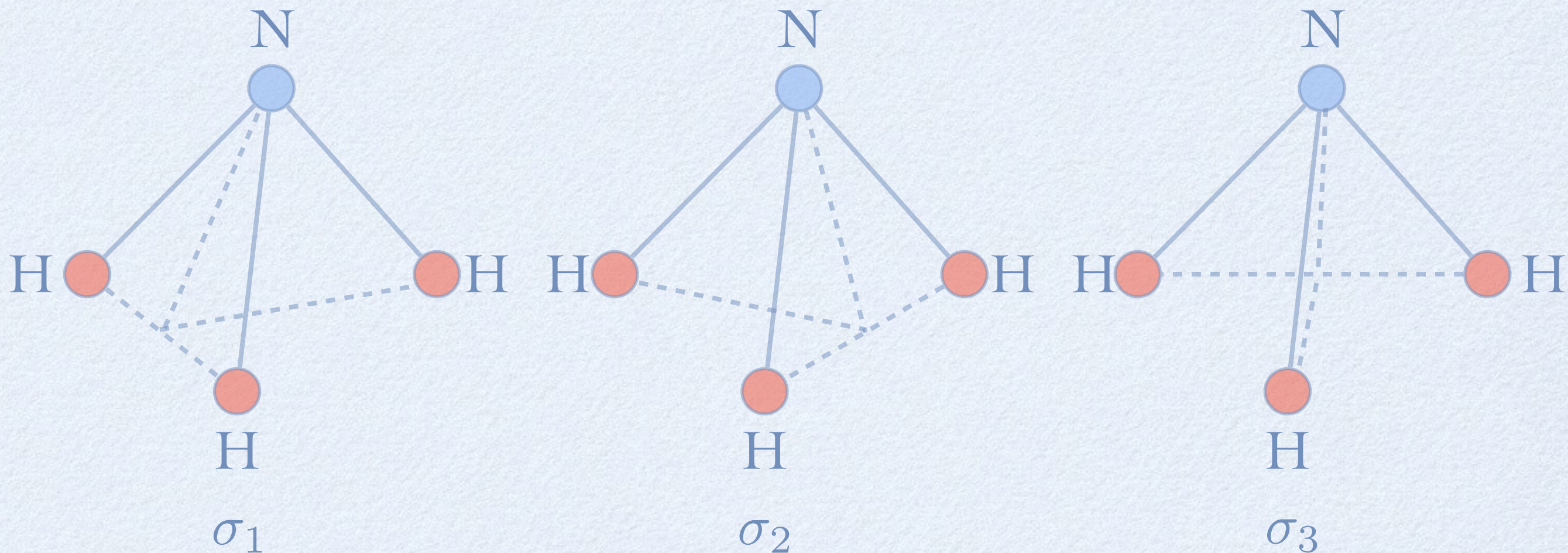
Supposons que notre physique est invariante par le groupe de symétrie de NH_3 . Pour autant, dans notre problématique, il se peut que plusieurs aspects nous intéressent.



Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Supposons que notre physique est invariante par le groupe de symétrie de NH_3 . Pour autant, dans notre problématique, il se peut que plusieurs aspects nous intéressent.



Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

C_{3v}	E	σ_1	σ_2	σ_3	C_3	C_3^2
E	E	σ_1	σ_2	σ_3	C_3	C_3^2
σ_1	σ_1	E	C_3^2	C_3	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	C_3	E	C_3^2	σ_1	σ_3
σ_3	σ_3	C_3^2	C_3	E	σ_2	σ_1
C_3	C_3	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	E
C_3^2	C_3^2	σ_3	σ_1	σ_2	E	C_3

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Pour simplifier, admettons que la répartition des charges électriques est celles de charges ponctuelles, + pour les H et - pour N. Par toutes les opérations de symétrie de G, la charge de l'azote est inchangée.

S'il fallait représenter les transformations de la charge de l'azote associées aux symétrie (au groupe précédent), on associerait 1 à toutes les opérations.

Mais pour N, la position est inchangée : peut être est-ce une observation triviale? Mais pour les H, qui sont déplacés, les charges restent elles aussi identiques. D'où la même représentation.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Soyons plus précis.

La distribution de la charge dans cette molécule est une fonction de

$$\mathbb{R}^3 \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} : \rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{r} \mapsto \rho(\vec{r})$$

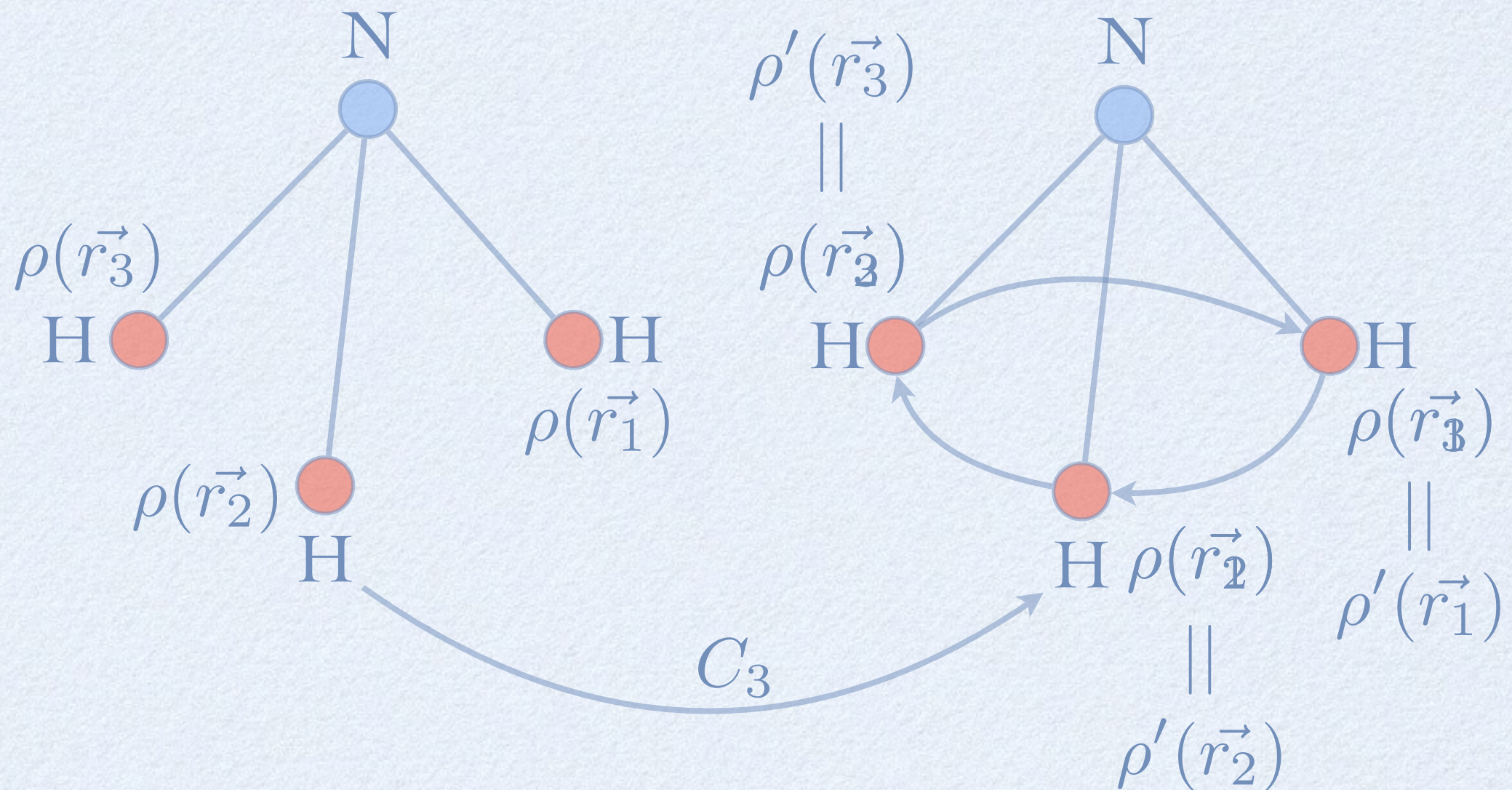
Comment agit une opération de symétrie sur cette distribution?

$$\rho'(\vec{r}) = \mathcal{O}[\rho(\vec{r})] ?$$

La nouvelle densité en un point a pour valeur celle qu'avait la densité au point qui a été déplacé.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques



$$\rho'(\vec{r}) = \mathcal{O}[\rho(\vec{r})] = \rho(\mathcal{O}^{-1}(\vec{r}))$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Donc le groupe opère sur les fonctions via son action sur l'espace.

Finalement, c'est l'étape nécessaire à tout calcul : la distribution de charge se transforme trivialement par les opérations du groupe parce que, même si l'espace est transportée par les opérations du groupe, la fonction prend les mêmes valeurs partout dans l'espace et par conséquent, est indifférente à ses modifications (de l'espace).

La représentation triviale n'est donc pas sans intérêt : elle indique que le groupe opère simplement sur l'objet d'intérêt (fonction ou opérateur).

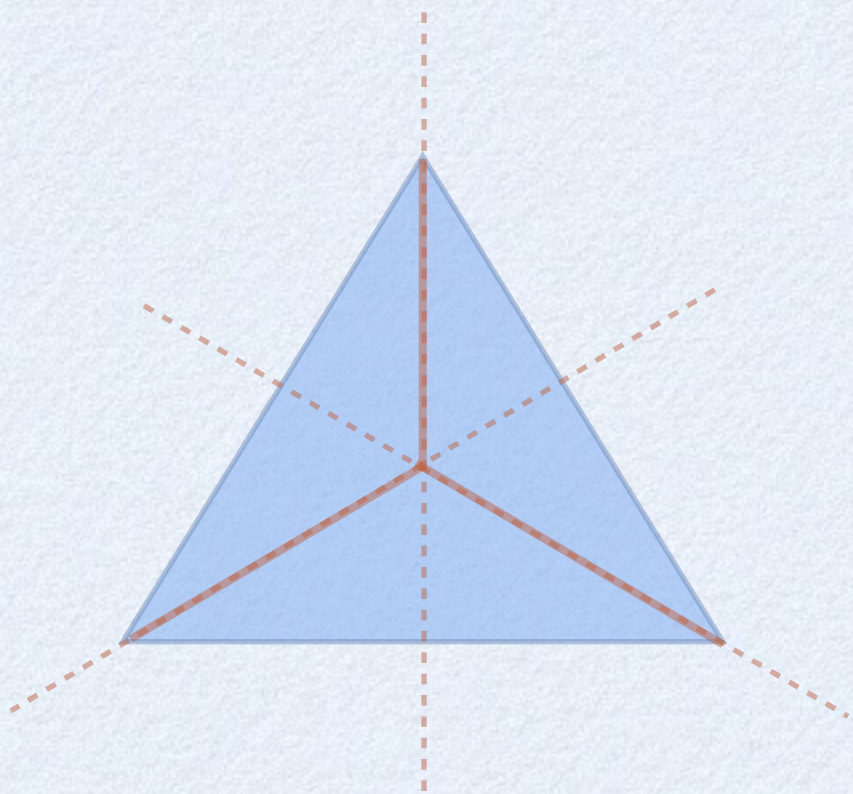
Un exemple standard, dans beaucoup de modèles, est l'énergie : celle-ci se transforme selon la représentation triviale d'à peu près n'importe quel groupe géométrique.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Continuons avec la molécule d'ammoniaque.

La charge se transforme trivialement; quid du champ électrique?



Le moment dipolaire est suivant l'axe Oz, le champ possède une symétrie de révolution autour de cet axe.

Le champ possède trois composantes, on définit donc une représentation de dimension 3, qui décrit la transformation des composantes du champ :

$$\vec{E}' = \rho[g] \vec{E} = \vec{E} (\rho(g)^{-1} \vec{r})$$

où est l'erreur?

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Si on choisit une base, «judicieusement», on obtient des matrices :

$$\begin{array}{ccc} E & C_3 & C_3^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

On a bien une représentation tridimensionnelle. Vraiment?

En fait, une seule de nouvelle. On en a trop fait...

E

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_3

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_3^2

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

σ_1

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

σ_2

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

σ_3

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Ce qui confirme le laïus du début. S'intéresser à des objets particuliers permet de construire des représentations, mais rien de générique.

➤ Il faut une méthode plus générale.

Nous avons construit des représentations à partir de la physique qui nous intéresse. Prenons le point de vue diamétralement opposé : construisons des représentations a priori (c'est d'ailleurs le point de vue du mathématicien).

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

La représentation régulière

Soit G un groupe fini, d'ordre g et notons ainsi ses éléments:

$$G = \{e = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{|G|}\}$$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, à $|G|$ dimensions, muni d'une base orthonormée (i.e il existe un produit scalaire sur E). On indexe cette base par les éléments de G , $\{v_{a_i}\}_{1 \leq i \leq |G|}$.

On définit alors les opérateurs suivants, via leur action sur les vecteurs de base,

$$\forall a_i \in G, \mathcal{O}(a_i) v_{a_j} = v_{(a_i a_j)}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Exercice : l'ensemble des $\mathcal{O}(a_i)$ forme un groupe d'éléments de $GL(E)$, qui plus est isomorphe à G . C'est donc une représentation fidèle du groupe.

Dans la base précédente, ces opérateurs sont représentés par des matrices,

$$\begin{aligned}\Gamma[\mathcal{O}(a_i)]_{jk} &= 1 \text{ ssi } a_i a_k = a_j \\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}$$

Remarque : soulignons que l'espace vectoriel est tout à fait «formel», il n'y a pas de physique ici, du moins, pas apparemment.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Quelques représentations classiques

Pour le groupe qui laisse invariant les sommets de la molécule d'ammoniaque, nous avons trouvé 4 représentations, dont 2 particulières, parce qu'elles sont génériques:

- ▶ la **représentation triviale**, qui associe 1 à tous les éléments.
- ▶ la **représentation régulière**, qui est toujours fidèle, mais qui semble de dimension un peu excessive.

En fait, il en existe une infinité, mais pour un groupe fini, on peut montrer qu'il existe un nombre fini de représentations, des briques élémentaires en quelque sorte, telles que TOUTE représentation de ce groupe est construite à l'aide de ces dernières.

Avant de les déterminer, montrons comment on peut passer d'une représentation à une autre sans gain/perte d'information (**équivalence**), et comment on peut choisir dans une même famille, une représentation unitaire (**unitarisabilité**).

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Représentations équivalentes

Considérons une représentation de dimension d , c'est à dire un homomorphisme de groupes entre un groupe abstrait G , fini (d'ordre $\#G$), et un groupe de $\#G$ endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension d , sur C , qui sont inversibles.

$$\begin{aligned}\rho : G &\longrightarrow GL(E) \\ g &\longmapsto \rho(g)\end{aligned}$$

Dans $GL(E)$, choisissons un endomorphisme quelconque. Il est inversible. Soit s cet endomorphisme.

A tout élément g de G , on peut associer $s.\rho(g).s^{-1}$.

Ce nouvel endomorphisme fait partie de $GL(E)$, puisque $GL(E)$ est un groupe, donc stable pour la composition des endomorphismes.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Représentations équivalentes

Soit g_1, g_2 deux éléments de G . Alors,

$$(s.\rho(g_1).s^{-1}).(s.\rho(g_2).s^{-1}) = s.\rho(g_1).\rho(g_2).s^{-1} = s.\rho(g_1g_2).s^{-1}$$

Par conséquent, nous venons de définir une nouvelle représentation
 (E, ρ')

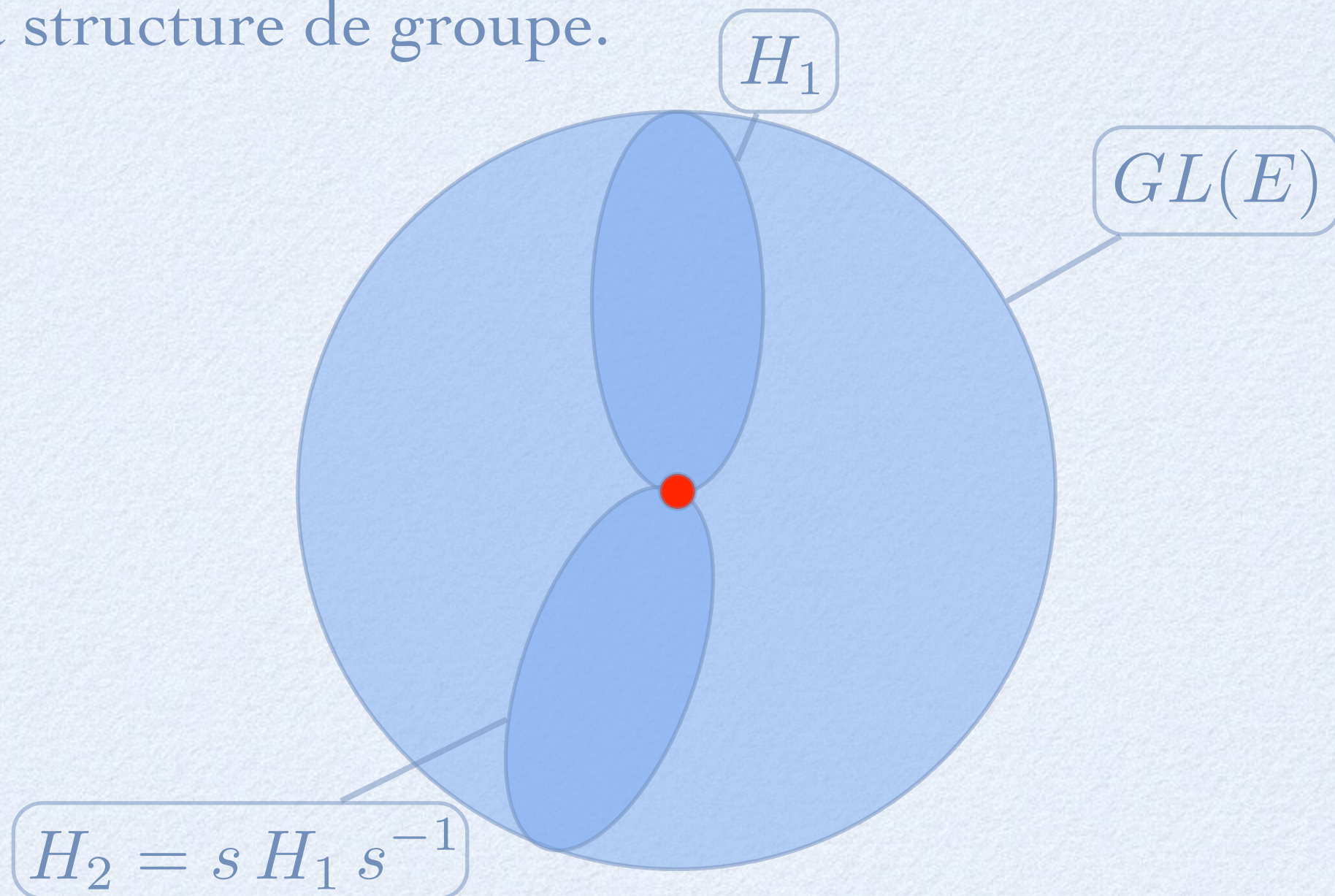
Remarque : dans $(GL(E), o)$, cela veut dire que $\rho(g)$ et $\rho'(g)$ sont conjugués.

Cette action de groupe partitionne $GL(E)$ en classes d'équivalence, qui sont des classes de conjugaison (via un automorphisme intérieur - nous l'avons vu dans la première partie). On obtient un nouveau sous groupe de $GL(E)$, conjugué au précédent.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Représentations équivalentes

On peut imaginer la conjugaison comme une «rotation» cohérente de toute la structure de groupe.



Représentations Linéaires des Groupes Finis

Représentations équivalentes

Interprétation géométrique : si on muni E d'une base $\{x^n\}_{1 \leq n \leq d}$.

On peut définir

$$x'^p = \sum_n (S^{-1})_{np} x^n$$

Où S est la matrice de s dans la base x . Puisque s est inversible, la nouvelle famille x' est libre, c'est donc une base.

On a aussi

$$x^m = \sum_q (S)_{qm} x'^q$$

Par conséquent, si on note $\Gamma(g)$ la matrice de l'endomorphisme $\rho(g)$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Représentations équivalentes

$$\rho(g) x^m = \rho(g) \left(\sum_q S_{qm} x'^q \right) = \sum_q S_{qm} (\rho(g) x'^q)$$

$$\rho(g) x'^q = \sum_{m,n,p} (S^{-1})_{qm} \Gamma(g)_{mn} S_{pn} x'^p = \sum_p \Gamma'(g)_{pq} x'^p$$

Autrement dit, la représentation ρ' , équivalente à la représentation ρ correspond à une autre transcription algébrique du groupe d'opérateurs, $\{\rho(g)\}_{g \in G}$, obtenue après le changement de base défini par la matrice S .

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Représentations équivalentes

C'est à dire qu'au niveau matriciel, la relation de similitude entre matrices permet de définir une infinité de représentations équivalentes entre elles :

A chaque g , on associe un $\rho(g)$. Un même $\rho(g)$ prend des formes différentes en fonction du choix de la base. Le groupe des endomorphismes reste le même, c'est sa représentation matricielle qui change.

Question : peut-on faire un choix «judicieux» parmi toutes ces représentations? Pour beaucoup de raisons techniques, on aime les matrices unitaires (on aime les endomorphismes qui conservent le produit scalaire).

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Unitarisabilité

Définition : Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E . On dit que la représentation (E, ρ) est unitaire si $\rho(g)$ est unitaire pour tout g élément de G .

Autrement dit, $\forall g \in G, \forall x, y \in E,$

$$(\rho(g)x | \rho(g)y) = (x | y)$$

Ou encore, $\forall g \in G, \rho(g)$ conserve le produit scalaire.

Une représentation (E, ρ) est dite unitarisable s'il existe un produit scalaire sur E tel que (E, ρ) est unitaire.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Unitarisabilité

Théorème : Toute représentation d'un groupe fini est unitarisable.

Démonstration : Soit (E, ρ) une représentation d'un groupe fini G et soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E .

On définit $(\cdot | \cdot)'$ par :

$$\forall x, y \in E, \quad (x|y)' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)x | \rho(g)y)$$

(c'est bien un produit scalaire)

Montrons que pour tout g dans G , $\rho(g)$ conserve $(\cdot | \cdot)'$:

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Unitarisabilité

Montrons que pour tout g dans G , $\rho(g)$ conserve $(\cdot | \cdot)'$:

$$\begin{aligned}(\rho(g)x | \rho(g)y)' &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(h)\rho(g)x | \rho(h)\rho(g)y) \\&= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(hg)x | \rho(hg)y) \\&= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} (\rho(k)x | \rho(k)y) \\&= (x | y)'\end{aligned}$$

Par conséquent, $((E, (\cdot | \cdot)'), \rho)$ est une représentation unitaire.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Unitarisabilité

En résumé : on peut trouver un produit scalaire qui fasse de tous les endomorphismes (du groupe) des endomorphismes unitaires. En particulier, si on muni l'espace de représentation d'une base, le nouveau produit scalaire correspond à un changement de base et les deux représentations sont équivalentes (conjuguées).

A partir de maintenant, on ne considère que des représentations unitaires. [Quand l'espace de représentation est muni d'une base, alors le groupe de matrice est un groupe de matrices unitaires.]

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité

A ce stade, nous n'avons qu'effleuré la question de l'action des $\rho(g)$ sur l'espace de représentation.

Soit (E, ρ) une représentation de G un groupe.

Définition : Un sous espace vectoriel $F \subset E$ est dit invariant par ρ si, $\forall g \in G, \rho(g) F \subset F$, c'est à dire si,

$$\forall g \in G, \forall x \in F, \rho(g) x \in F,$$

On peut alors parler de la représentation (E, ρ) restreinte à F , qui est aussi une représentation de G . On la note $\rho|_F$.

Une telle représentation restreinte à un sous espace vectoriel invariant s'appelle une **sous-représentation**.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité

Définition : Une représentation (E, ρ) de G est dite **irréductible** si les seuls sous espaces vectoriels de E invariants par ρ sont $\{0\}$ et E tout entier.

$$\begin{array}{ccc}
 E & C_3 & C_3^2 \\
 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|c} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|c} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\
 \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \begin{array}{c} \text{---} F_1 \quad \text{---} F_2 \\ F_2 \oplus F_2 = E \end{array}
 \end{array}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité

Somme directe de représentations

Définition : Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de G . Alors $(E_1 \oplus E_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$, où $(\rho_1 \oplus \rho_2)(x_1 \oplus x_2) = (\rho_1(x_1), \rho_2(x_2))$ est une représentation de G , appelée somme directe des représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) .

Si ρ_1 et ρ_2 ((E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2)) sont des représentations matricielles, les matrices de la représentation somme directe de (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) , sont des matrices diagonales par bloc.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on définit par récurrence la somme directe de k représentations, $(E_1, \rho_1), \dots, (E_k, \rho_k)$. Si dans une somme directe ρ_1 est répétée m_1 fois, ..., ρ_k est répétée m_k fois, on appellera m_k la multiplicité de ρ_k et on notera $m_i \rho_i = \rho_i \oplus \dots \oplus \rho_i$ (m_i fois)

d'où l'écriture finale $m_1 \rho_1 \oplus m_2 \rho_2 \oplus \dots \oplus m_k \rho_k$

où $m_i \rho_i$ est appelée la composante **isotypique** de type ρ_i .

Une représentation est dite **complètement réductible** si elle est somme directe de représentations irréductibles.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité

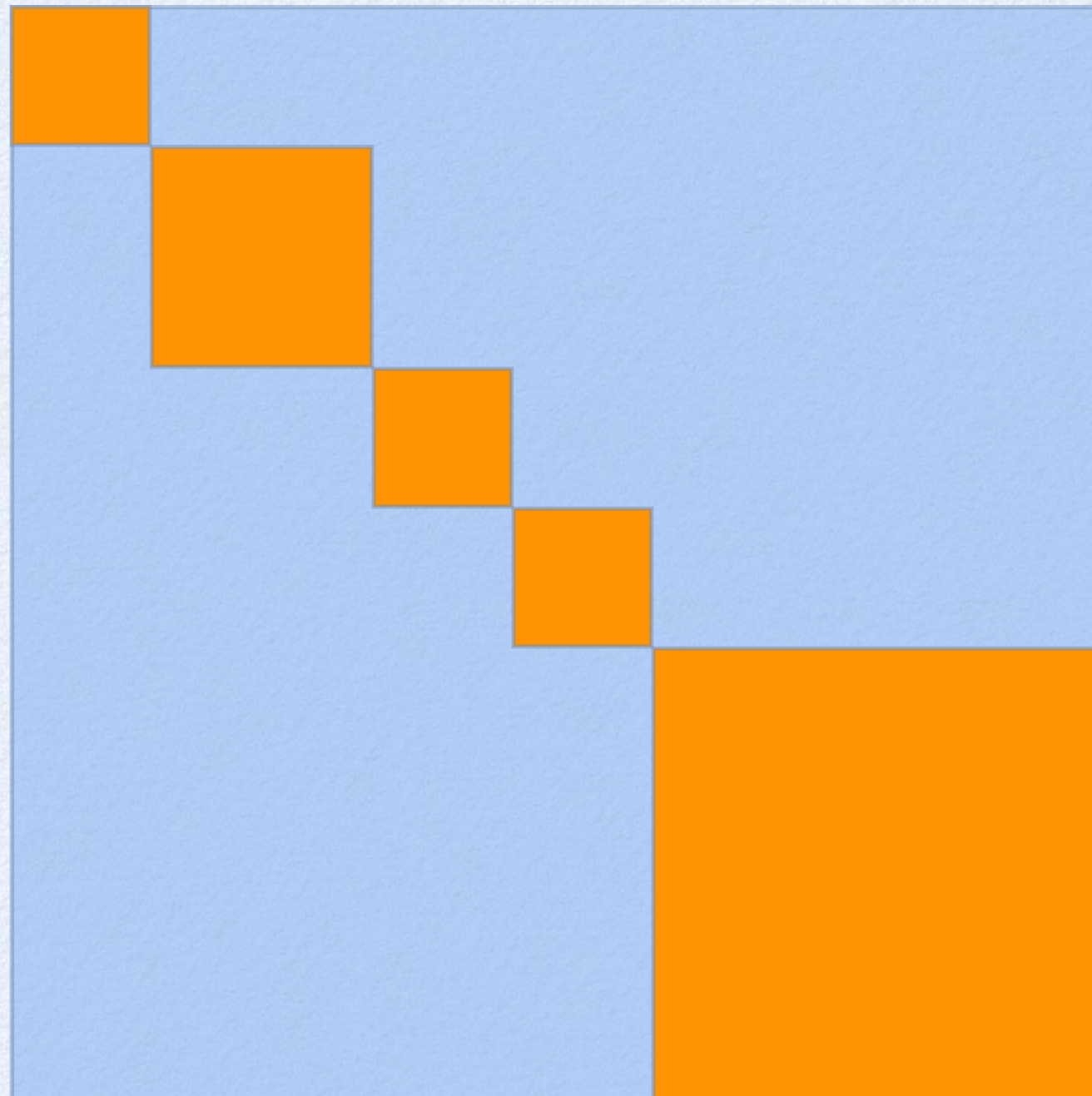
En fait, c'est l'opération inverse qu'on désire mettre en place : à partir d'une représentation, comment la décomposer en somme directe de représentations irréductibles?

Théorème de Maschke : toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible.

«Démonstration» : soit E est le seul sous espace invariant, et c'est fini, soit il ne l'est pas, et donc $E = F \oplus G$. On décompose ainsi de suite ($G = F^\perp$ est aussi invariant $\rightarrow$ exercice).

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité



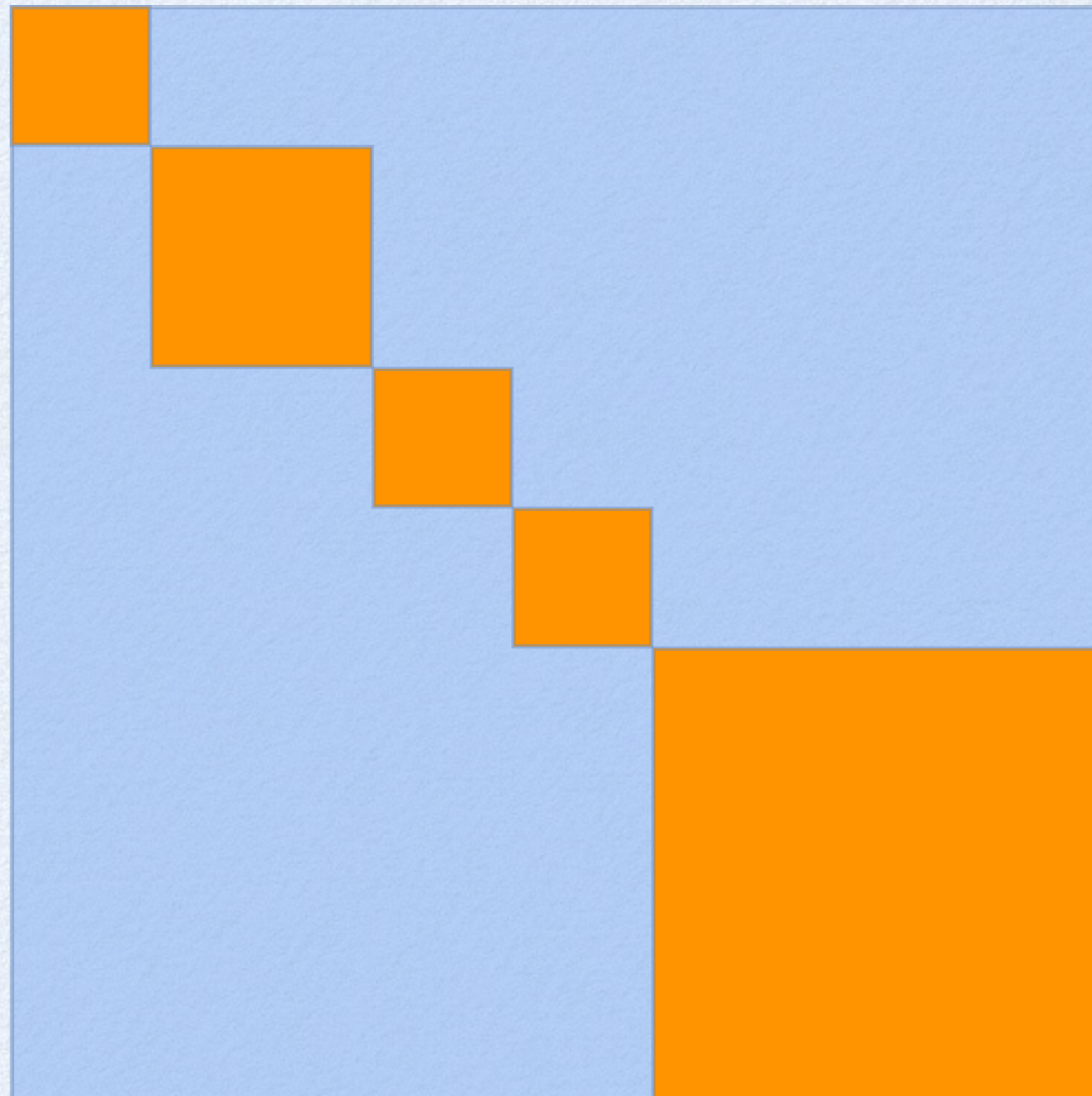
Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité

On applique toutes les similitudes matricielles pour regrouper les endomorphismes qui sont isomorphes : certains blocs apparaissent plusieurs fois.

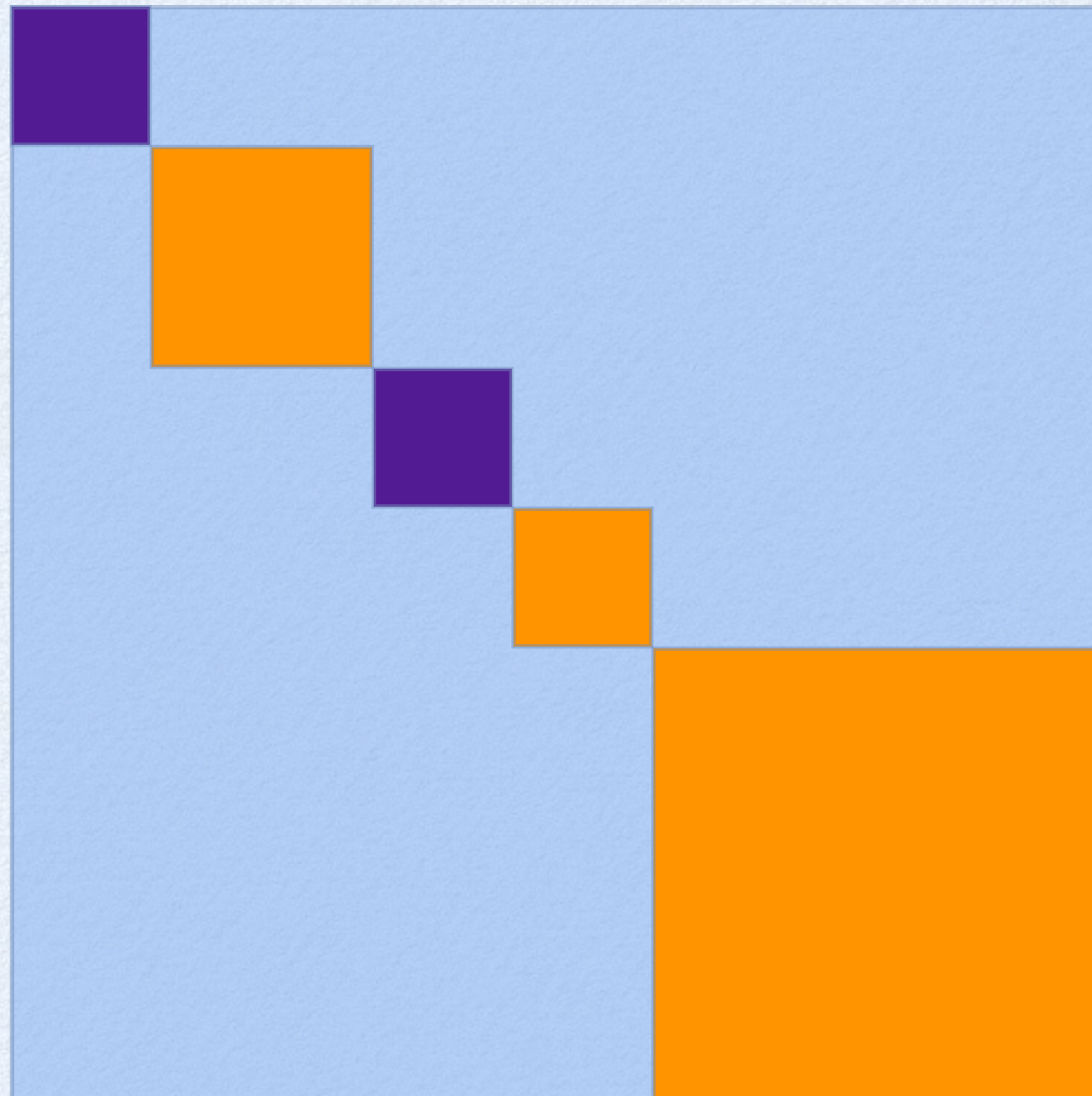
Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité



Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité



Représentations Linéaires des Groupes Finis

Invariance et (ir)réductibilité

$$(E, \rho) = 2 \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array}$$

Pour systématiser le procédé, il faut savoir **construire** toutes les RI (à l'équivalence près) puis, pour une représentation donnée, savoir reconnaître si elle **contient** une ou plusieurs RI, une ou plusieurs fois. D'ailleurs, des RI, y en a-t-il beaucoup?

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Lemme de Schur (1) : si $\Gamma^{(i)}$ est une représentation irréductible d'un groupe G , et si une matrice P commute avec **toutes** les matrices de $\Gamma^{(i)}$, alors P est proportionnelle à l'identité.

$$\Gamma^{(i)}(g) P = P \Gamma^{(i)}(g), \forall g \in G \Rightarrow P = c \mathbb{I}_{l_i}$$

Notations : on note souvent Γ les représentations, et $\Gamma(g)$ les matrices associées.

Démonstration : pas de démonstration. [mais on peut en parler]

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Lemme de Schur (2) : si $\Gamma^{(i)}$ et $\Gamma^{(j)}$ sont deux représentations irréductibles d'un groupe G , de dimensions respectives l_i et l_j , et si une matrice M ($l_i \times l_j$) satisfait la relation

$$\Gamma^{(i)}(g) M = M \Gamma^{(j)}(g), \quad \forall g \in G$$

alors soit (a) M est nulle, soit (b) $\det(M) \neq 0$, auquel cas les deux représentations sont équivalentes.

Remarque : deux représentations ne peuvent être équivalentes que si leurs dimensions sont égales. Donc si $l_i \neq l_j$, seul le cas (a) s'applique.

Démonstration : pas de démonstration. [idem]

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Théorème d'orthogonalité : (i) et (j) inéquivalentes; alors

$$\sum_{g \in G} \Gamma_{km}^{(i)}(g) \Gamma_{sn}^{(j)*}(g) = \frac{|G|}{l_i} \delta_{ij} \delta_{ks} \delta_{mn}$$

Démonstration : principe, on construit

$$M = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Gamma^{(i)}(g) X \Gamma^{(j)}(g^{-1}) \quad N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Gamma^{(i)}(g) X \Gamma^{(i)}(g^{-1})$$

le calcul montre que

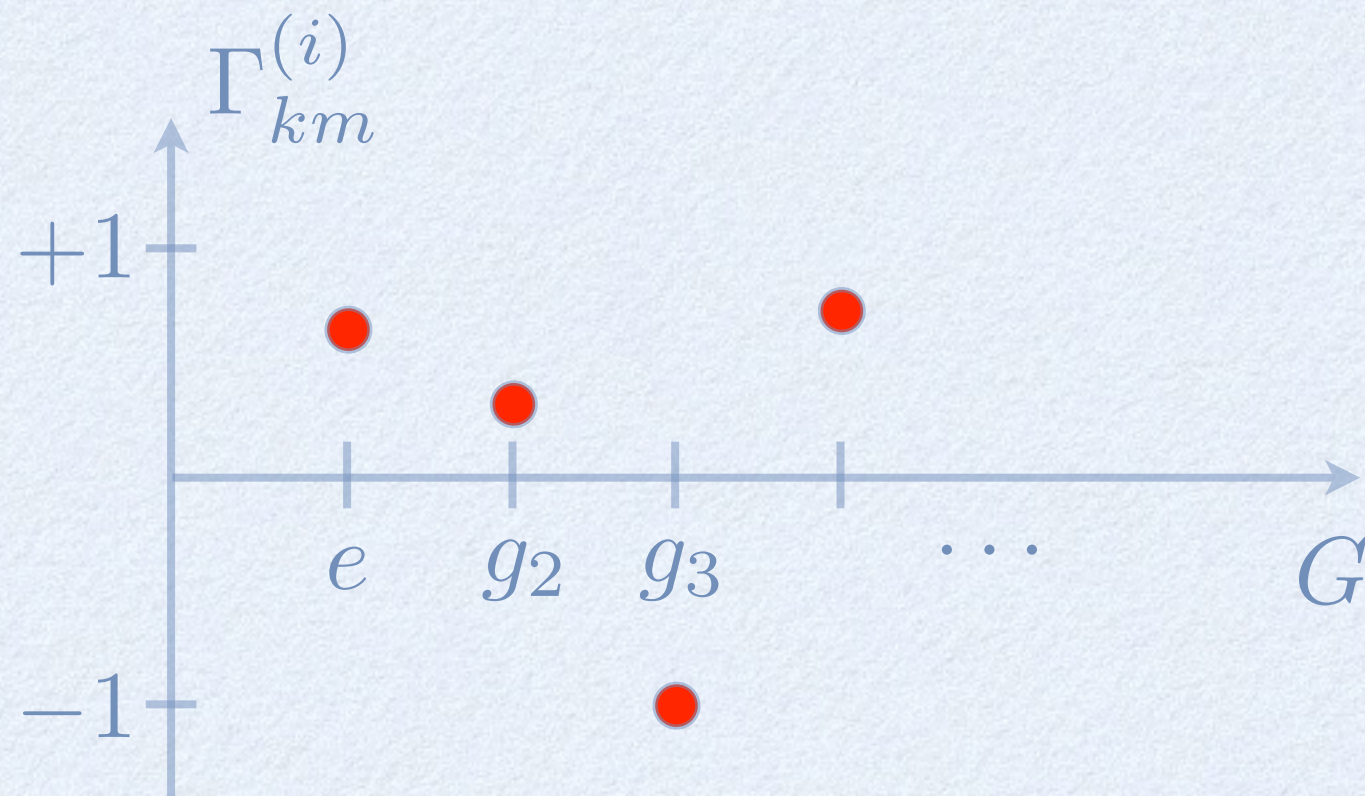
$$\Gamma^{(i)}(h) M = M \Gamma^{(j)}(h), \quad \forall h \in G \quad \Gamma^{(i)}(h) N = N \Gamma^{(i)}(h), \quad \forall h \in G$$

Schur 1 et 2 permettent de conclure pourvu qu'on choisisse bien X (exercice).

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

«Interprétation» : considérons les $\Gamma_{km}^{(i)}$ comme des fonctions définies sur G , à valeurs dans $\mathbb{C}$.



$$\{\Gamma_{km}^{(i)}(e), \Gamma_{km}^{(i)}(g_2), \dots, \Gamma_{km}^{(i)}(g_{|G|})\}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

«Interprétation» : considérons les $\Gamma_{km}^{(i)}$ comme des fonctions définies sur G , à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Supposons qu'il y ait c RI. Alors pour chaque $1 \leq i \leq c$, $1 \leq k, m \leq l_i$, nous avons une fonction $\Gamma_{km}^{(i)}$, soit un total de $\sum_{i=1}^c l_i^2$ fonctions.

Ces fonctions définissent un espace vectoriel à $|G|$ dimensions, parce que définir une fonction, c'est donner sa valeur sur chacune des $|G|$ composantes.

Sur cet espace, on peut se munir d'un produit scalaire,

$$\left(\Gamma_{sn}^{(j)}, \Gamma_{km}^{(i)} \right) \equiv \sum_{g \in G} \Gamma_{sn}^{(j)*}(g) \Gamma_{km}^{(i)}(g)$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Or le théorème d'orthogonalité stipule que ces fonctions sont deux à deux orthogonales,

$$\sum_{g \in G} \Gamma_{km}^{(i)}(g) \Gamma_{sn}^{(j)*}(g) = \frac{|G|}{l_i} \delta_{ij} \delta_{ks} \delta_{mn}$$

C'est donc une famille libre. Mais est-elle complète? Le nombre de «vecteurs» indépendants dans un espace vectoriel ne peut dépasser sa dimension, on en déduit

$$\sum_{i=1}^c l_i^2 \leq |G|$$

Effet collatéral : le nombre de RI, comme leurs dimensions, sont finis.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Caractère : les caractères d'une représentation $\Gamma^{(i)}$ sont les traces des matrices représentant chaque élément du groupe G .

$$\chi^{(i)}(g) = \sum_k \Gamma_{kk}^{(i)}(g)$$

Remarque : si deux éléments du groupe sont conjugués, c'est à dire s'ils appartiennent à la même classe de conjugaison, leurs caractères sont identiques.

$$\begin{aligned} g_1 = h^{-1}g_2h &\Rightarrow \Gamma^{(i)}(g_1) = \Gamma^{(i)}(h^{-1})\Gamma^{(i)}(g_2)\Gamma^{(i)}(h) \\ &\Rightarrow \chi^{(i)}(g_1) = \chi^{(i)}(g_2) \end{aligned}$$

[On dit que les caractères sont des fonctions centrales.]

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Orthogonalité des Caractères : le théorème d'orthogonalité devient, pour les caractères,

$$\sum_{g \in G} \chi^{(i)}(g) \chi^{(j)*}(g) = |G| \delta_{ij}$$

$$\sum_k \sqrt{\frac{n_k}{|G|}} \chi_k^{(i)} \sqrt{\frac{n_k}{|G|}} \chi_k^{(j)*} = \delta_{ij}$$

Exercice : $c \leq \frac{|G|}{n_k}$ (indice : trouver le bon espace vectoriel...)

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Réduction (d'une représentation réductible) : soit Γ une représentation d'un groupe G . Connaissant les représentations irréductibles, on peut connaître combien de fois $\Gamma^{(i)}$ apparaît dans Γ .

Considérons les caractères des éléments du groupe. Puisque,

$$\Gamma = \bigoplus a_i \Gamma^{(i)} \Rightarrow \forall g \in G, \chi(g) = \sum_i a_i \chi^i(g)$$

On utilise ensuite l'orthogonalité des caractères, pour trouver enfin,

$$a_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(i)*}(g) \chi(g)$$

Terminologie : caractères primitifs vs caractères composés.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Lemmes de Schur, orthogonalité, réduction

Remarque : l'étude de la représentation régulière à l'aide des outils précédents, c'est à dire sa décomposition complète nous donne les égalités, là où on n'avait que des inégalités.

$$\sum_{i=1}^c l_i^2 \leq |G| \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^c l_i^2 = |G|$$

$$c \leq \frac{|G|}{n_k} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{|G|}{n_k} = \# \text{classes}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

Exercice : soit g une opération du groupe G , soit E un espace vectoriel, et soit Γ la représentation matricielle associée à une représentation de G sur E , muni d'une base.

On note $\mathcal{O}(g)$ la matrice associée à l'action de g sur E .

Soit

$$P^{(i)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(i)*}(g) \mathcal{O}(g)$$

Où $\chi^{(i)}$ est le caractère primitif associé à la représentation $\Gamma^{(i)}$.

Montrer que $P^{(i)}$ est un projecteur.

PS : c'est l'arme fatale pour «symétriser».

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

Remarque (importante) : soit H un hamiltonien qui vit dans un espace de Hilbert, et R une opération (une transformation par exemple) qui agit sur cet espace.

Appliquons R à l'espace de Hilbert :

$$\mathcal{H}\psi(x) = \varphi(x)$$

$$R[\mathcal{H}(x)\psi(x)] = R\varphi(x) = \varphi(R^{-1}x) = \mathcal{H}(R^{-1}x)\psi(R^{-1}x)$$

$$R[\mathcal{H}\psi(x)] = R\mathcal{H}R^{-1}R\psi(x)$$

Donc l'action de l'opérateur R , sur H , s'écrit,

$$\mathcal{H}(R^{-1}x) = R\mathcal{H}R^{-1}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

Il peut arriver que ce changement de coordonnées ne change pas H ,

$$\mathcal{H}(R^{-1}x) = \mathcal{H}(x)$$

Auquel cas, H commute avec R ,

$$\mathcal{H}(x) = R \mathcal{H} R^{-1}$$

On cherche les états propres de H .

$$\mathcal{H} \psi_\nu = \epsilon_\alpha \psi_\nu$$

Puisque H commute avec l'opération R , alors $R \psi_\nu$ est aussi état propre de H pour la même valeur propre.

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

Si ce changement de coordonnées R est associé à une opération de symétrie, et si H commute avec tous les éléments de ce groupe (de symétries), alors pour tous les R , $R\psi_\nu$ est aussi un état propre de H , pour la même valeur propre.

Donc pour tout R du groupe, nous pouvons décomposer $R\psi_\nu$ dans le sous espace propre associé.

$$R\psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n_\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(R) \psi_\mu$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

On peut vérifier que ces matrices Γ définissent bien une représentation du groupe. Par conséquent, les fonctions propres de chaque espace propre fournissent une base pour une représentation du groupe de symétrie.

Donc représenter le groupe de symétrie dans l'espace de Hilbert revient à bloc diagonaliser le Hamiltonien!

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

Cas pratique : considérons le cas de deux spins $1/2$ couplés par un Hamiltonien d'échange,

$$\mathcal{H} = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

Une base naturelle de l'espace de Hilbert où vit la physique est

$$\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$$

Et dans cette base, le Hamiltonien s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

Le groupe de symétrie qui laisse invariant le Hamiltonien est $G = (e, \tau_{12})$, constitué de l'identité et de la permutation des deux indices. Il y a deux classes de conjugaison donc deux représentations, et comme il est commutatif, elles sont de dimensions 1. (pourquoi?)

D'où la table de caractères,

$\mathbf{C}$	e	τ
Γ	1	1
Γ	1	-1

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

On remarque que l'hamiltonien commute avec S^z ; on peut d'ores et déjà partitionner l'espace en trois secteurs,

$$\mathcal{S}^z = 1 \equiv \{|++\rangle\} ; \mathcal{S}^z = 0 \equiv \{|+-\rangle, |-+\rangle\} ; \mathcal{S}^z = -1 \equiv \{ |--\rangle \}$$

On construit les projecteurs,

$$P^{(1)} = \frac{1}{2} (\mathcal{O}_e + \mathcal{O}_{(12)}) \qquad P^{(2)} = \frac{1}{2} (\mathcal{O}_e - \mathcal{O}_{(12)})$$

et on les applique aux vecteurs de base.

$$P^{(1)} |+-\rangle = \frac{1}{2} (|+-\rangle + |-+\rangle)$$

$$P^{(2)} |+-\rangle = \frac{1}{2} (|+-\rangle - |-+\rangle)$$

Représentations Linéaires des Groupes Finis

Projecteurs

$$\begin{aligned} P^{(1)} |++\rangle &= |++\rangle \\ P^{(1)} |--\rangle &= |--\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{(2)} |++\rangle &= 0 \\ P^{(2)} |--\rangle &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\left\{ \frac{1}{2} (|+-\rangle + |-+\rangle), |++\rangle, |--\rangle \right\} \in \Gamma^{(1)}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} (|+-\rangle - |-+\rangle) \right\} \in \Gamma^{(2)}$$

En particulier, ici la bloc-diagonalisation diagonalise le Hamiltonien.
C'est rare...

Introduction à la Théorie des Groupes et aux Représentations Linéaires des Groupes Finis

Merci de votre attention, et bon courage!

